Filtrage Numérique : de la transformée en Z à la synthèse de filtres

David Bonacci et Corinne Mailhes:
david.bonacci@tesa.prd.fr
corinne.mailhes@tesa.prd.fr, ou @n7.fr
14-16 Port Saint Etienne, 31 000 Toulouse, France

Ouvrages de référence

- *Traitement Numérique du Signal*, M.Bellanger, Ed. Masson, collection CNET-ENST (Edition Dunod, 1993.)
- *T.N.S. 1.Bases*, F.Castanié, polycopié ENSEEIHT, 1986.
- *T.N.S. 2. Méthodes Avancées*, F.Castanié, polycopié ENSEEIHT, 1987.
- *Traité d'Electricité*, EPFL, Ed Georgi

  Vol XX, *Traitement Numérique des Signaux*, M.Kunt.

  Vol VI, *Théorie et Traitement des Signaux*, M.De Coulon.

G. Blanchet, M. Charbit "Traitement numérique du signal", Edition Hermès, 1998

A. Quinquis "Le traitement du signal sous Matlab", Edition Hermès, 2000

F. Truchetet "Traitement linéaire du signal numérique ", Edition Hermès, 1998

Plan

I- La transformée en Z : l'outil

II- Filtres R.I.F.
(à Réponse Impulsionnelle Finie)

1) Définition
2) Filtres à Phase Linéaire
3) Méthode de Synthèse

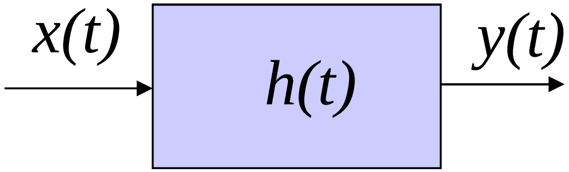
III- Filtres R.I.I.
(à Réponse Impulsionnelle Infinie)

1) Définition
2) Propriétés
3) Méthode de Synthèse

IV- Implantation

FILTRAGE NUMERIQUE

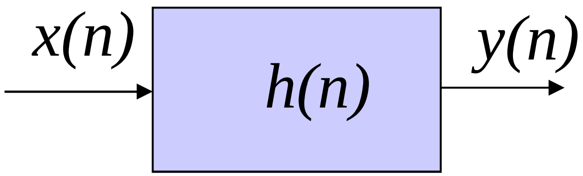
- L'autre application des plus courantes en T.S., après l'analyse spectrale
- Filtrage linéaire invariant dans le temps
- Relations numériques inspirées de l'analogique



$$y(t) = x(t) * h(t) = \int h(u)x(t-u)du$$
$$= \int x(u)h(t-u)du$$

$h(t)$ réponse impulsionnelle

$H(f)$ = T.F. $\{h(t)\}$ réponse fréquentielle



$$y(n) = x(n) * h(n) = \Sigma\ h(k)x(n-k)$$
$$= \Sigma\ x(k)h(n-k)$$

$h(n)$ réponse impulsionnelle

$H(\tilde{f})$ = T.F.D. $\{h(n)\}$ réponse fréquentielle

Filtrage Numérique et D.S.P.

Digital Signal Processors pour faire du Digital Signal Processing (DSP)… Temps réel, flexibilité, fiabilité

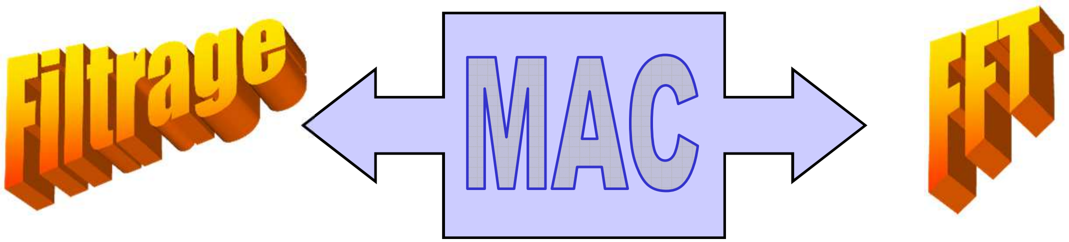
DSP différent d'un processeur classique car :

• **opération MAC : Multiply and Accumulate**

$$\mathbf{R \leftarrow R + X * Y}$$

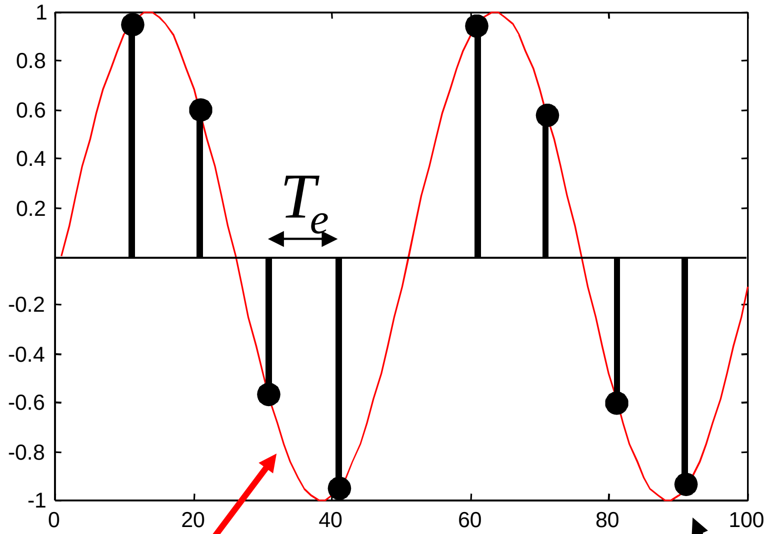
avec

• Gestion de l'overflow : bits d'extension de la dynamique
• Lecture de deux opérandes en un seul cycle micro (2 zones mémoires)
• Mémoire circulaire gérée par le hard du DSP



I – La transformée en Z : l'outil du Traitement du Signal Numérique

L'échantillonnage idéal : $x(t) \rightarrow x(nT_e)$ $n=0,\ldots,N-1$



$x_e(n) = \sum x(nT_e)\, \delta(t-nT_e)$

L'échantillonnage idéal provoque une **périodisation du spectre** autour des multiples de la fréquence d'échantillonnage

$$F_e=1/T_e$$

$$X_e(f)=F_e\sum X(f - nF_e)$$

À temps continu :
Transformée de Laplace,
Transformée de Fourier

$\Leftrightarrow$

À temps discret :
Transformée en Z,
Transformée de Fourier Discrète

Définition de la transformée en Z

$$\{x(n)\} \rightarrow \quad X(z) = \sum x(n)\, z^{-n}$$

$n = 0, 1, \ldots, +\infty$: TZ unilatérale

$n = -\infty, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, +\infty$: TZ bilatérale

Les relations entre ces transformées

Laplace : $X(p) = \int x(t)\, e^{-pt}\, dt$

Fourier : $X(f) = \int x(t)\, e^{-i2\pi ft}\, dt$

$p = i2\pi f \quad TL = TF$

$\Leftrightarrow$

T.Z : $X(z) = \sum x(n)\, z^{-n}$

TFD : $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-i2\pi kn/N}$

$z = e^{\,i2\pi \tilde{f}} \quad TZ = TFD$

Propriétés de la Transformée en Z

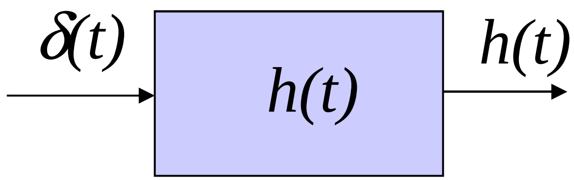
$x(n) * y(n) \rightarrow X(z).Y(z)$

$x(n-k) \rightarrow X(z)\, z^{-k}$ z^{-1} retard d'échantillonnage

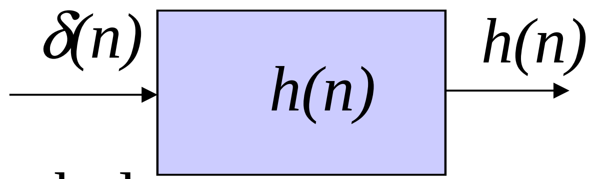
Dans un filtre linéaire :

$$y(n) = x(n) * h(n) \rightarrow Y(z) = X(z).H(z)$$

Réponse impulsionnelle d'un filtre :



Impulsion
De Dirac



Symbole
De Kronecker

Des filtres analogiques aux filtres numériques

Par analogie avec filtres analogiques, **réponse fréquentielle rationnelle**

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{M} a_k z^{-k}} \qquad a_0 = 1 \qquad \rightarrow \qquad h(n) = \text{T.Z.}^{-1}\{H(z)\}$$

$$y(n) = - \sum_{k=1}^{M} a_k\, y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k\, x(n-k)$$

Remarque : on note « M » dans les deux sommes par simplicité.
Nombre de coefficients dans les deux sommes pas forcément égaux.

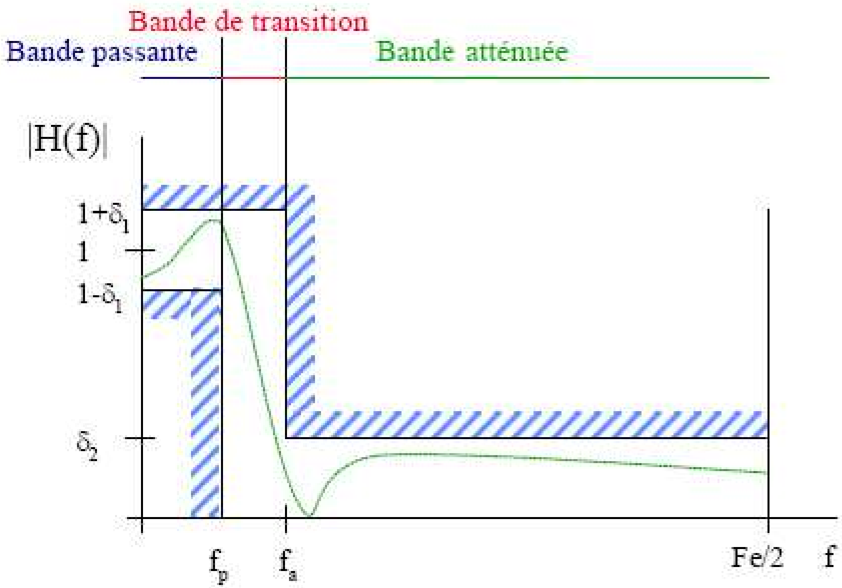
$$|\, H(f)\, |^2 = H(z)\, H(z^{-1})\, \big|_{z = e^{i2\pi f T_e}}$$

⚠ Suppose coefs réels

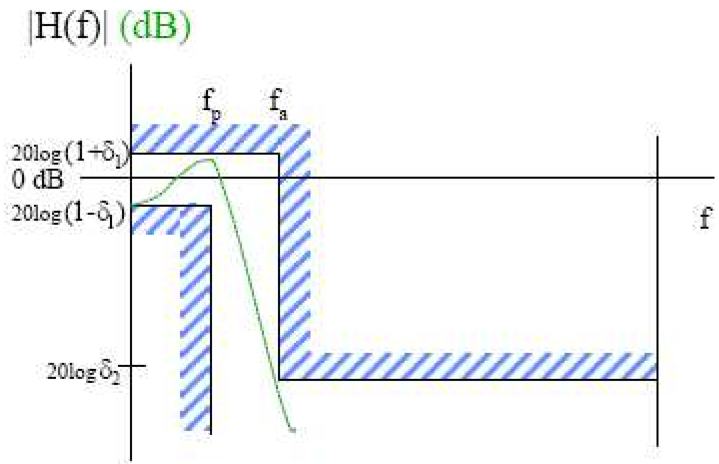
Spécifications des filtres numériques

– Gabarit fréquentiel

Passe-Bas (ou Passe-Haut) défini par sa sélectivité, son ondulation en BP et son atténuation en BA



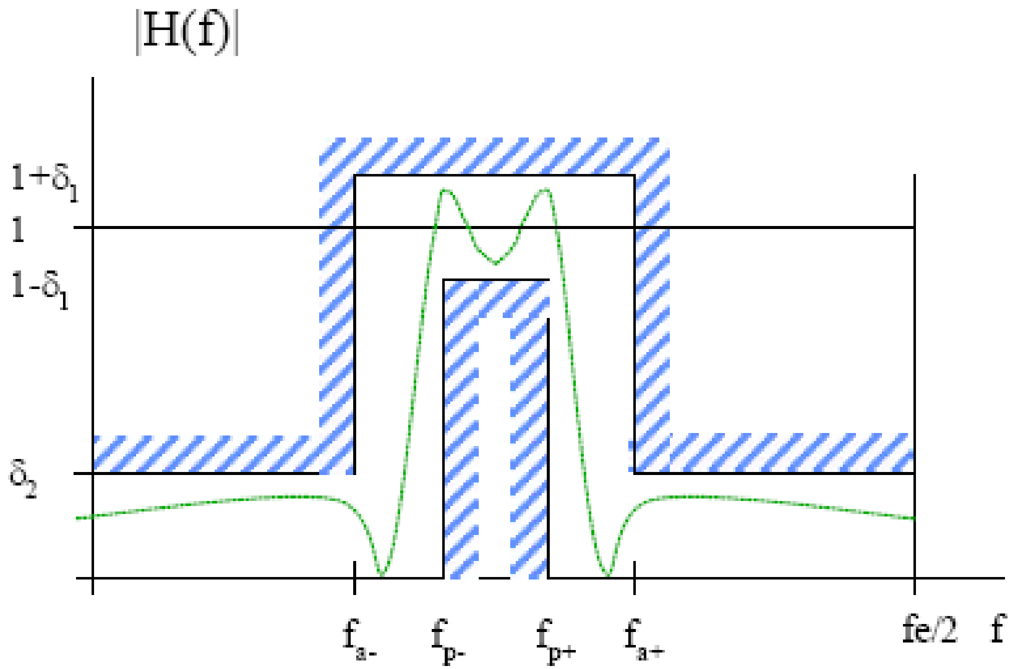
a) Gabarit fréquentiel linéaire



b) Gabarit fréquentiel en dB

Spécifications des filtres numériques

Passe-Bande (ou Réjecteur-de-Bande) défini par sa fréquence centrale, sa sélectivité, son ondulation en BP et son atténuation en BA



II – Filtres RIF (FIR) : 1) Définition

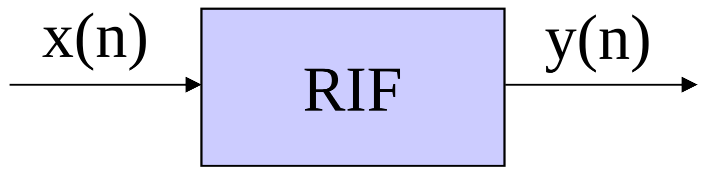
Cas particulier de filtres non récursifs :

$$y(n) = -\cancel{\sum_{k=1}^{M} a_k\, y(n-k)} + \sum_{k=0}^{M} b_k\, x(n-k)$$

d'où

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k\, x(n-k)$$

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k\, z^{-k}$$



$\rightarrow$ *$h(n) = b_n$ pour $n=0,\ldots,M$*

filtre à **Réponse Impulsionnelle Finie** (R.I.F.)

- ☞ tout zéro, **pas de pb de stabilité**, faible sensibilité numérique
- ☞ non récursif
- ☞ à mémoire finie, défini par M+1 coefficients
- ☞ **phase linéaire possible**

II – Filtres RIF (FIR) : 2) Phase Linéaire

$$H(f) = \sum_{k=0}^{M} b_k \, e^{-i2\pi k f T_e} = R(f)\, e^{-i\,\phi(f)}$$

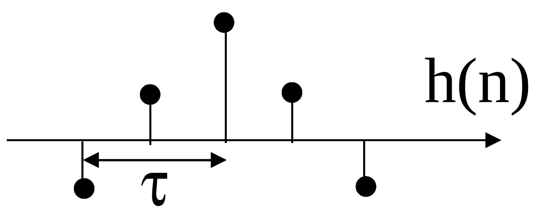
Temps de Propagation de Groupe (**TPG**) = évaluation du temps de propagation des paquets d'onde dans le système linéaire

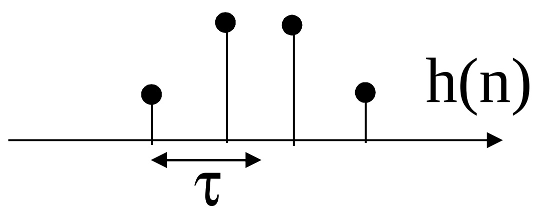
$$\tau(f) = -\, 1/(2\pi)\ \phi'(f)$$

Ex : une sinusoïde de fréquence f_0 retardée de $\tau(f_0)$ en sortie du filtre.

Phase linéaire = TPG constant $\qquad \phi(f) = \phi_0 + 2\pi\tau f$

• si $\phi_0 = 0$, on obtient un RIF à coefficients réels et **symétriques**

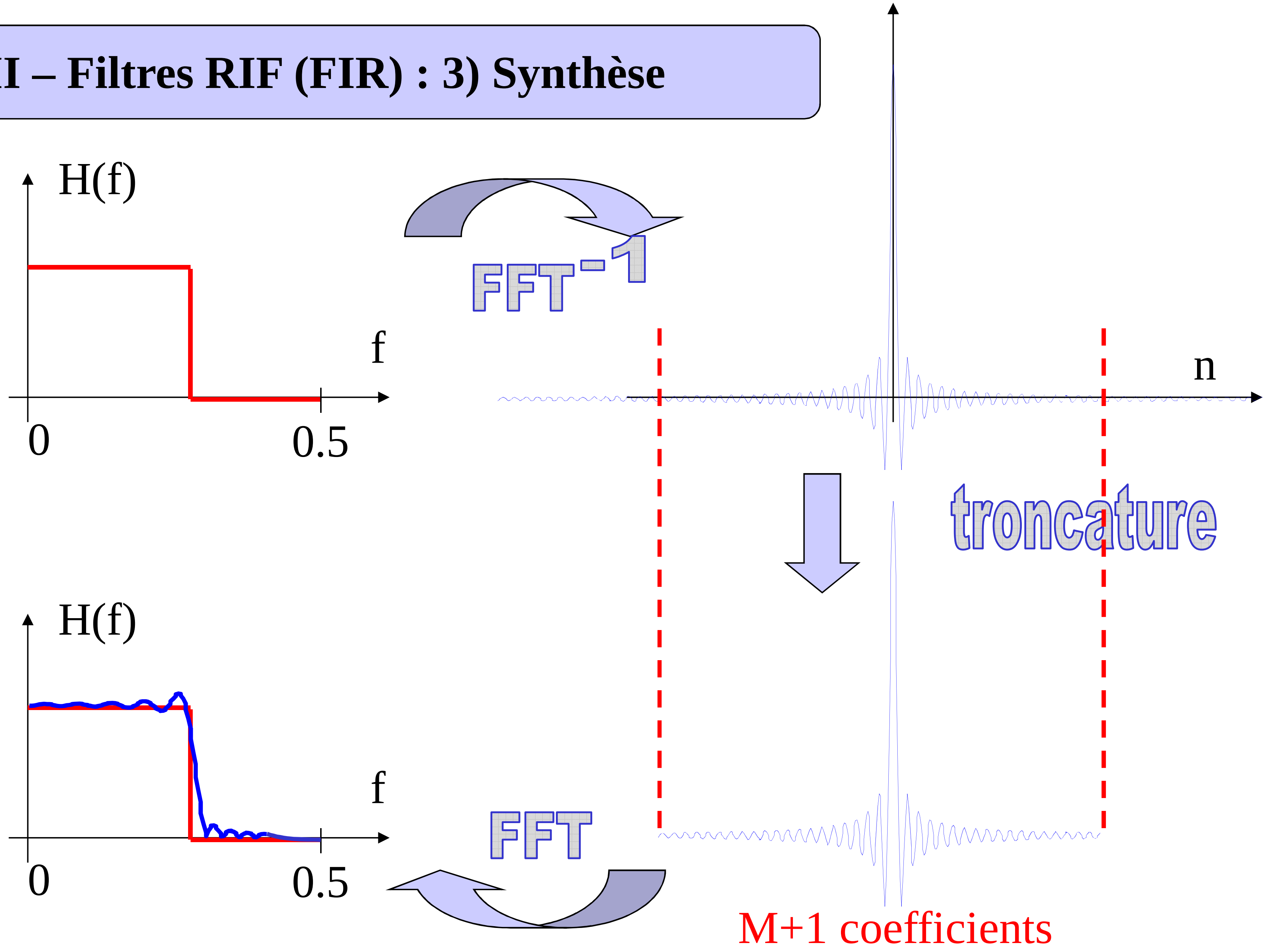




• si $\phi_0 = \pi/2$, on obtient un RIF à coefficients réels et **antisymétriques**

• sinon, RIF à coefficients complexes

II – Filtres RIF (FIR) : 3) Synthèse



II – Filtres RIF (FIR) : 3) Synthèse

➊À partir d'un filtre idéal et troncature de la réponse impulsionnelle

$$h_{RIF}(n)=h_I(n).w(n) \quad \text{soit} \quad H_{RIF}(f)=H_I(f) * W(f)$$

$w(n)$: fenêtre d'**apodisation** de support : $n=-p,\ldots,p$
conditionne **l'ordre du filtre** : filtre RIF d 'ordre $2p+1$

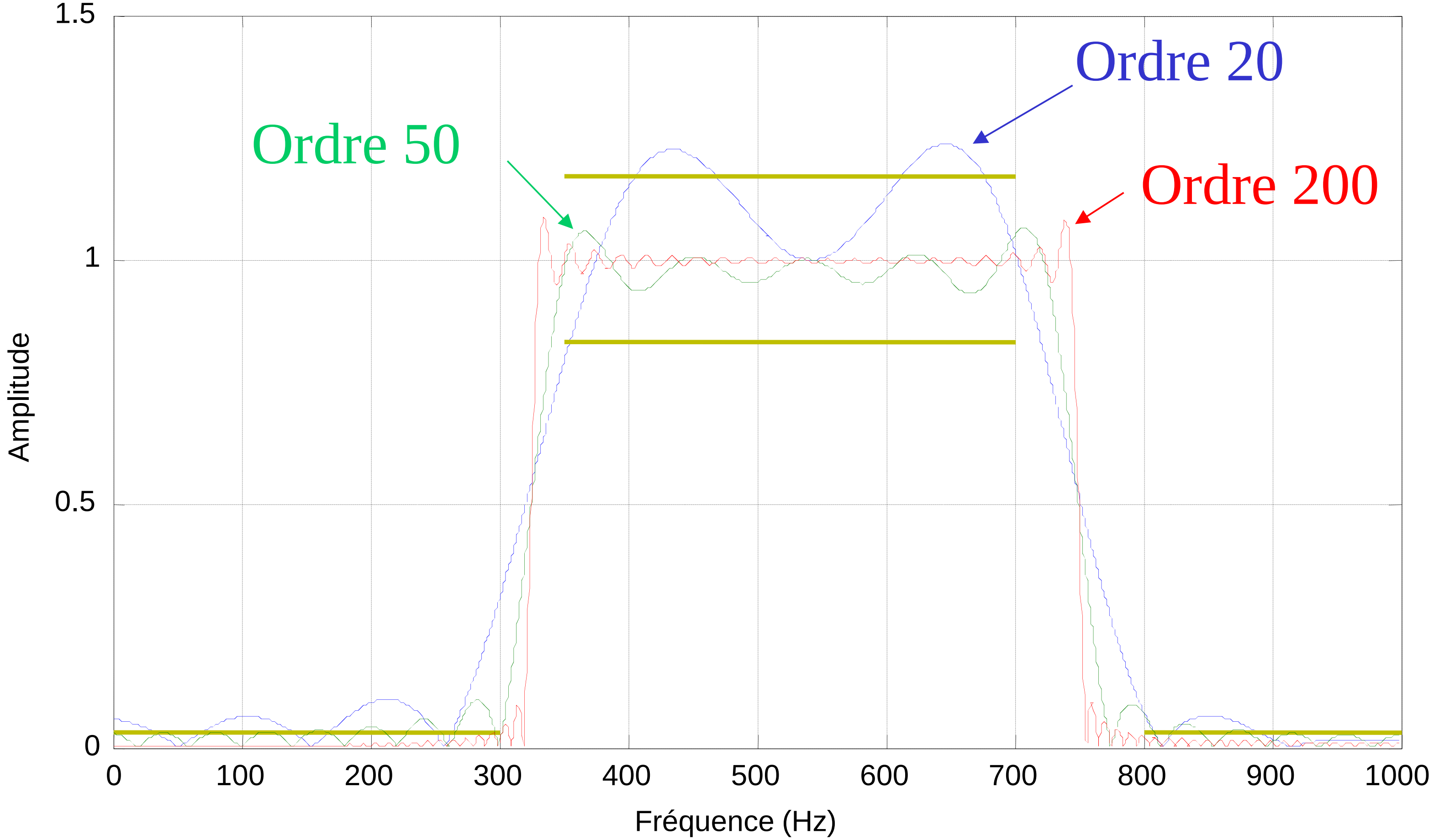
➋ filtre **causal** : décalage de la réponse impulsionnelle :

$$h_{RIF}(n)= h_{RIF}(n-p)$$

influence des paramètres : ordre du filtre, fenêtre d'apodisation
Ondulations en bande passante et affaiblie égales
Amplitude des ondulations non constante

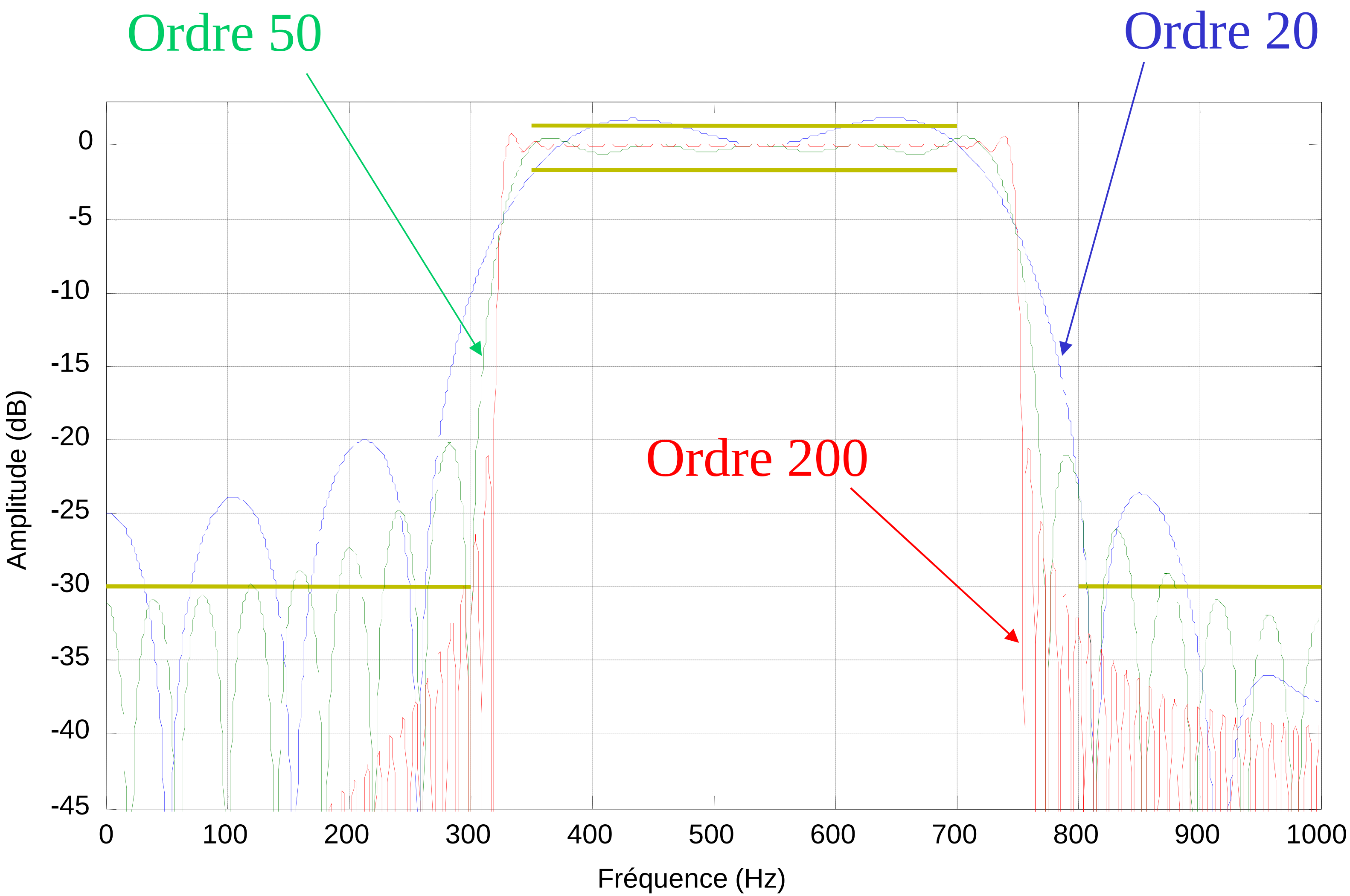
existe algorithmes d'optimisation pour égaliser les ondulations dans la bande et hors bande : REMEZ

RIF : Choix de l'ordre (échelle linéaire)



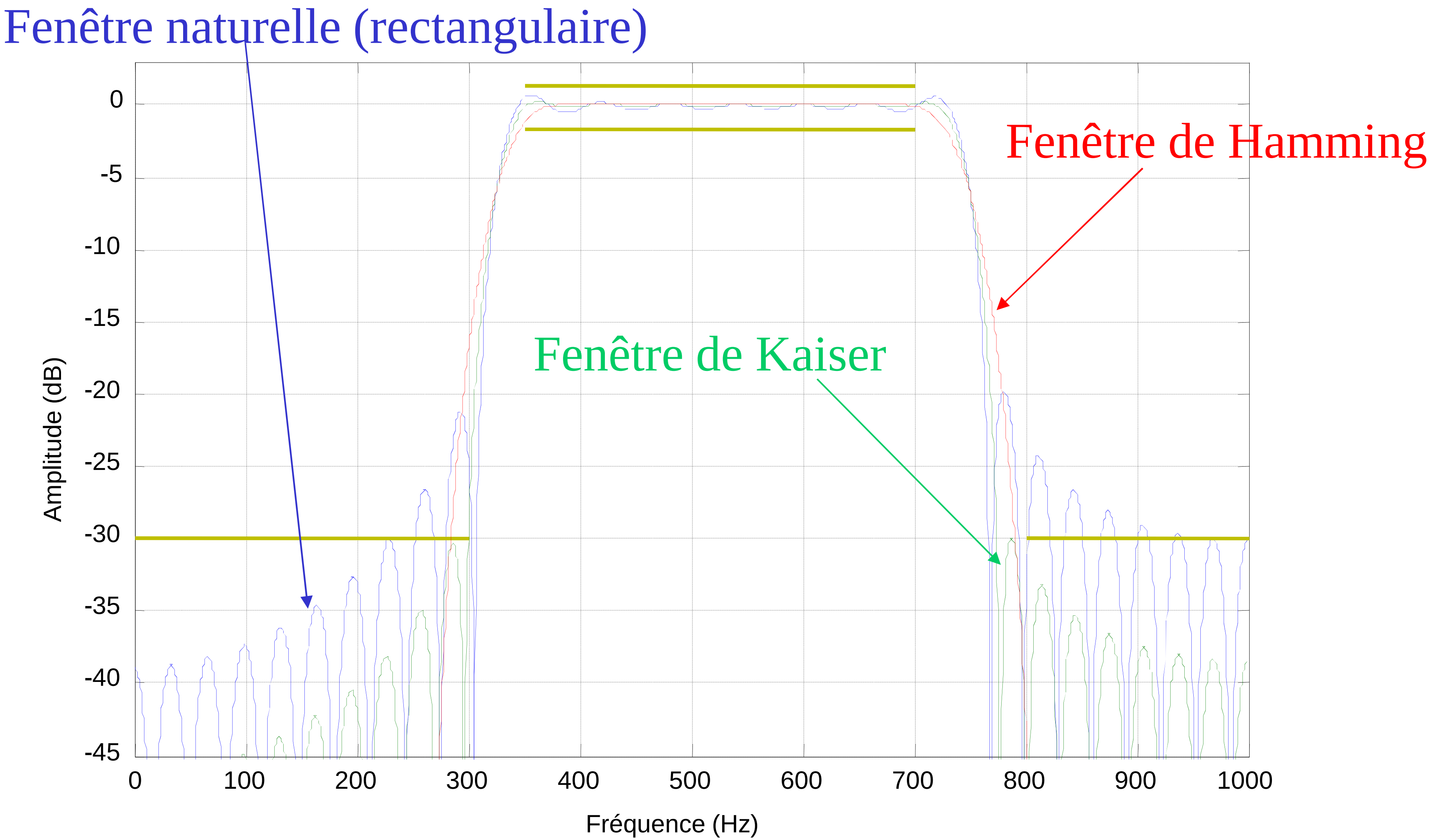
Synthèse par fenêtre naturelle (rectangulaire)

RIF : Choix de l'ordre (échelle logarithmique)



Synthèse par fenêtre naturelle (rectangulaire)

RIF : Choix de la fenêtre (échelle logarithmique)

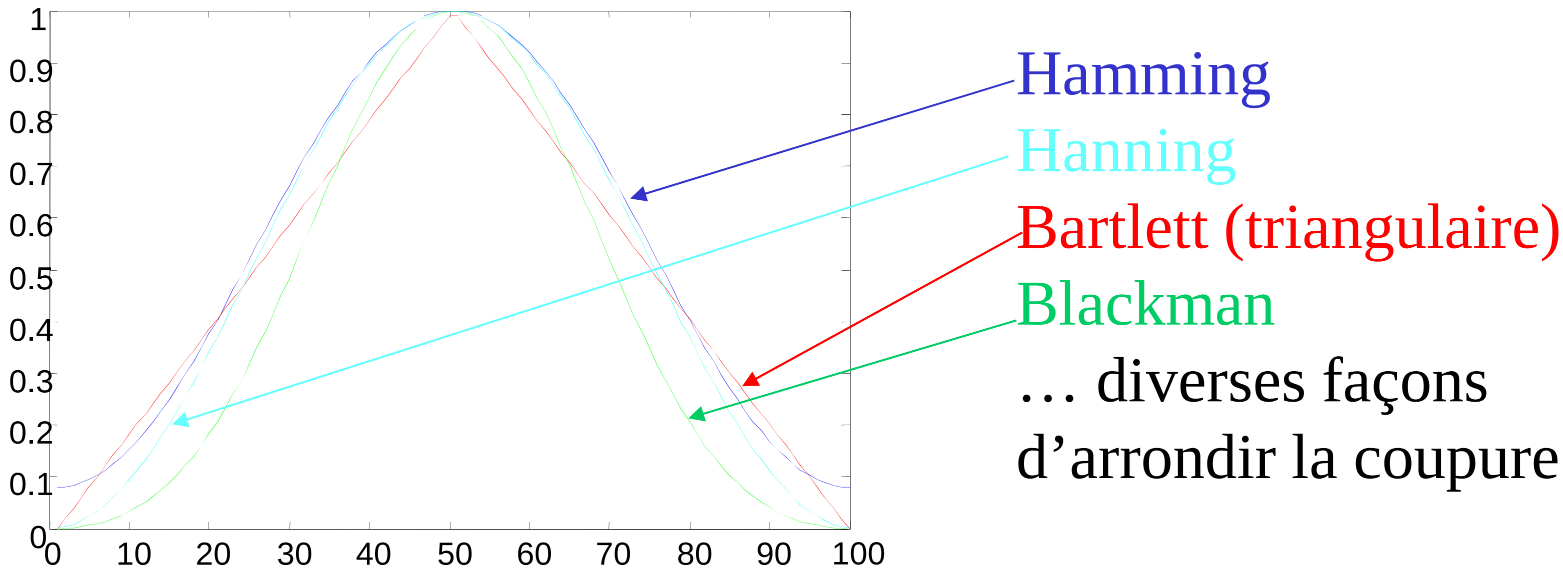


RIF d'ordre 50

RIF : Choix de la fenêtre

Voir : « On the Use of Windows for Harmonic Analysis with the Discrete Fourier Transform », F.J.Harris, Proc. Of the IEEE, vol 66, n1, Jan. 1978.

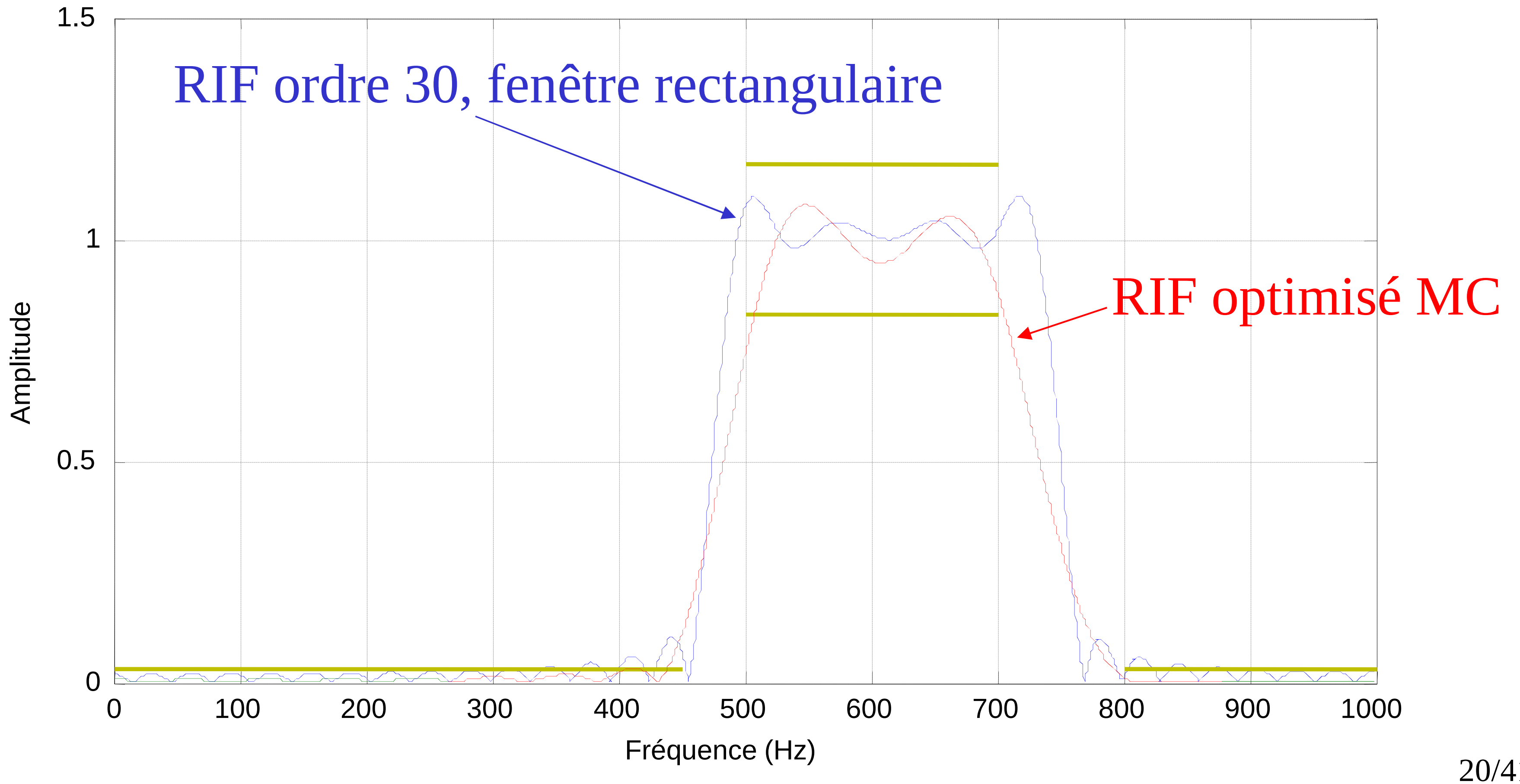
Choix entre largeur du lobe principal (pente du filtre) et les ondulations (ondulations dans les bandes)



… diverses façons d'arrondir la coupure

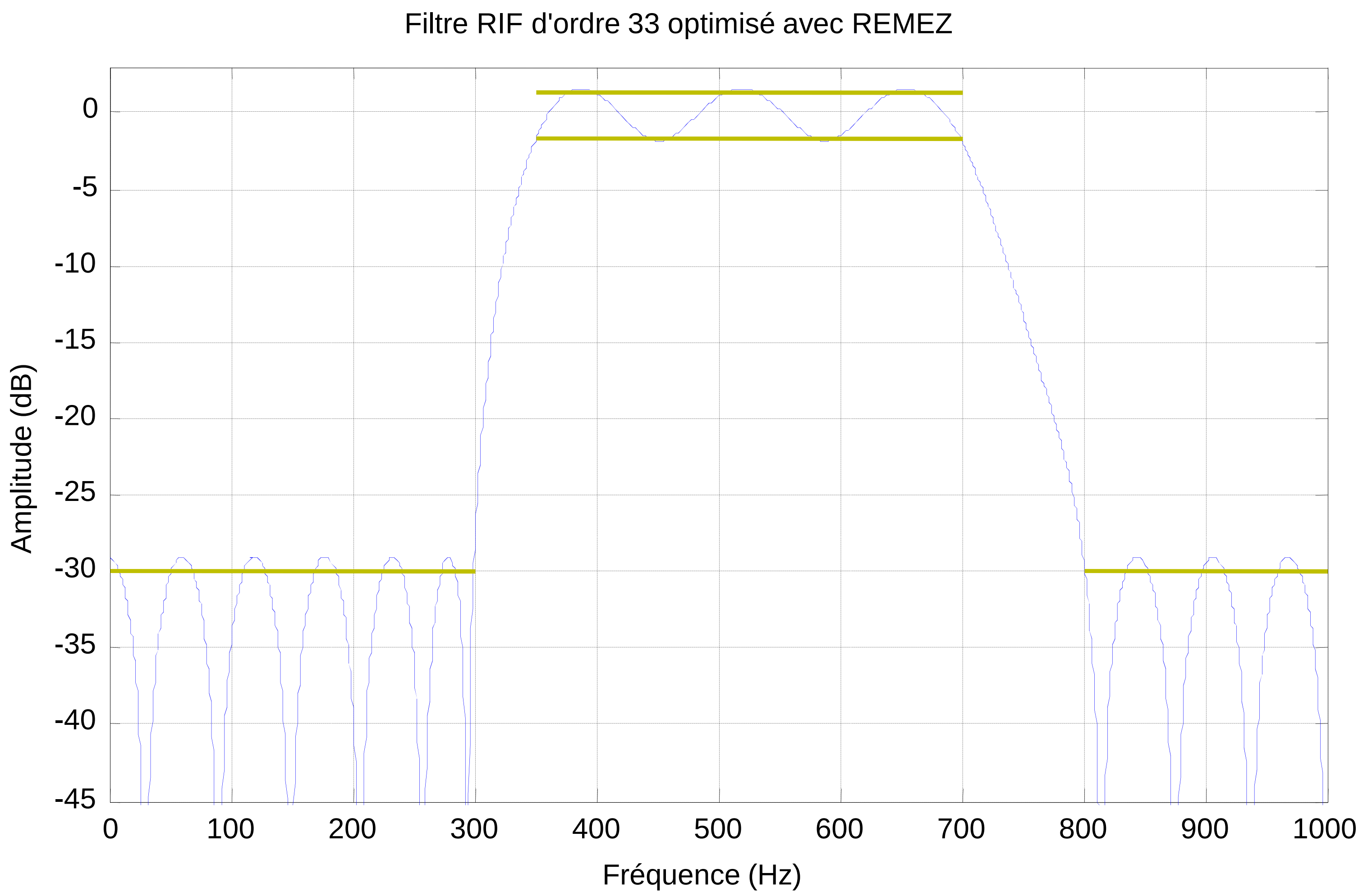
RIF : Optimisation – critère moindres carrés

$$\text{Critère : } J(h) = \sum_{n=0}^{N_f - 1} P^2(n)\,|\,H(f_n) - H_I(f_n)\,|^2$$



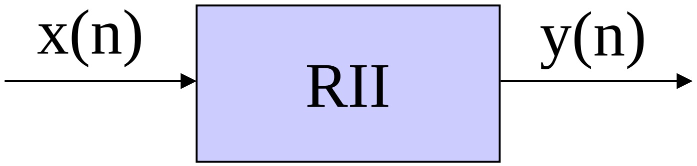
RIF : Optimisation – algorithme de Remez

Critère : avoir tous les maxima de l'erreur de même amplitude



Aucune démonstration de convergence…

III – Filtres RII (IIR) : 1) Définition



$$y(n) = -\sum_{k=1}^{M} a_k\, y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k\, x(n-k)$$

Filtres récursifs, propriétés proches des filtres analogiques

Fonction de transfert :

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{M} a_k z^{-k}} \quad \Rightarrow \quad |H(f)|^2 = H(z)\, H(z^{-1}) \,\Big|_{z = e^{i2\pi f T_e}}$$

Présence de pôles

!!! Risque d'instabilité !!!

III – Filtres RII (IIR) : 2) Propriétés

Réponse impulsionnelle et stabilité

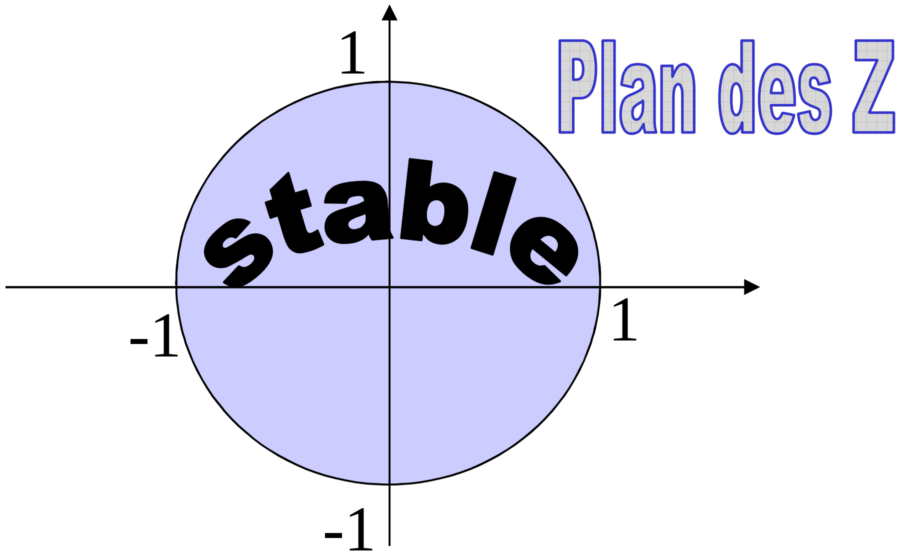
Si dénominateur n'a que des pôles simples, $h(n) = \sum_{k=1}^{M} A_k\, p_k^{\,n} \quad n>0$

avec H(z) décomposé en éléments simples

$$H(z) = \sum_{k=1}^{M} \frac{A_k}{1-p_k z^{-1}}$$

alors la condition de stabilité : **entrée bornée - sortie bornée** :

$$|h(n)| < B_h \text{ pour tout } n \Rightarrow |p_k| < 1 \text{ pour tout } k$$



III – Filtres RII (IIR) : 2) Propriétés

Réponse en phase : systèmes à minimum de phase

Définition :

tous les zéros du numérateur du filtres sont dans le cercle unité

(tous en dehors : système à maximum de phase)

(en dehors et en dedans : système à phase mixte)

Intérêt du minimum de phase : système inverse stable

Propriété recherchée dans beaucoup d'applications

Réponse en phase : TPG

On démontre :

filtres rationnels ne peuvent pas avoir de phase linéaire (sauf RIF)

III – Filtres RII (IIR) : 3) Synthèse

2 étapes

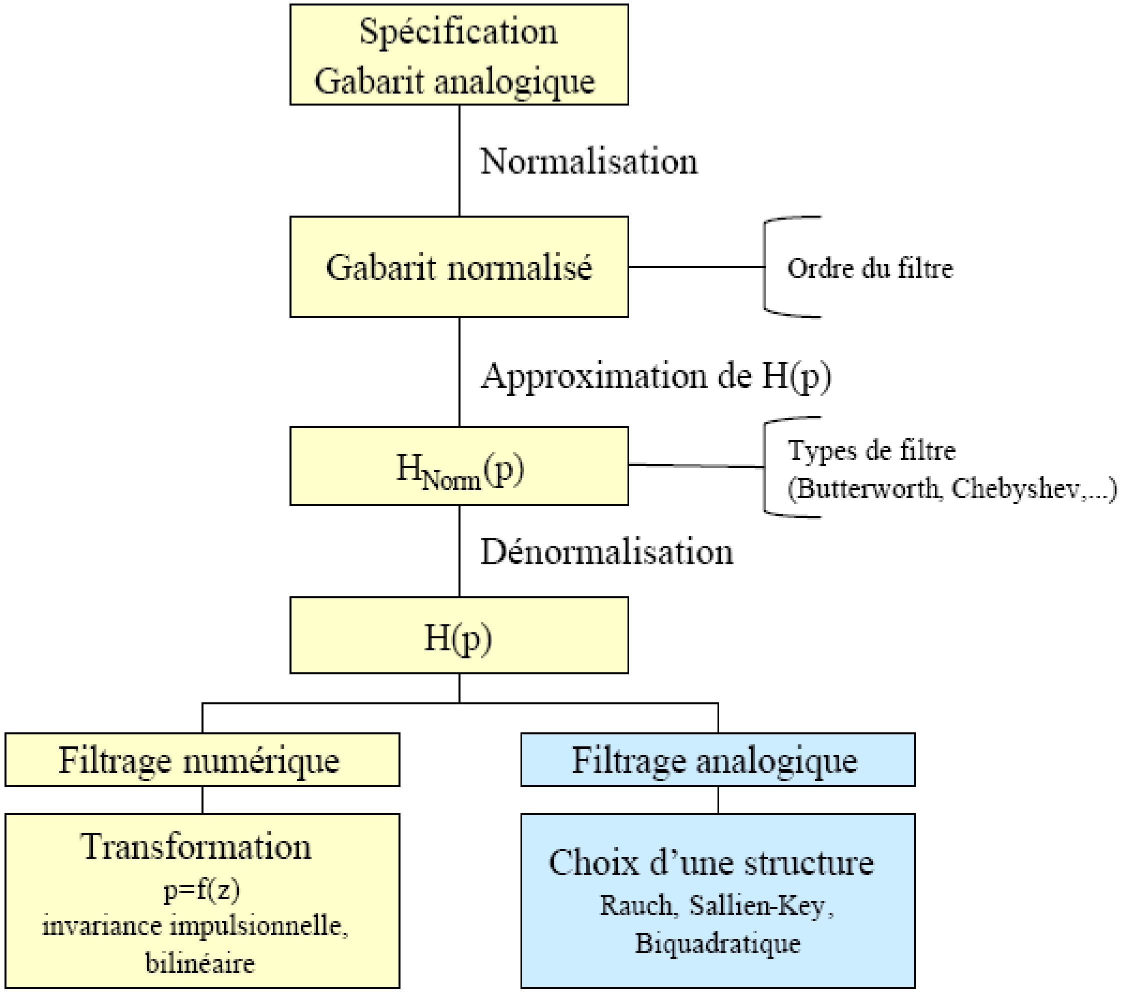
1. Synthèse d'un filtre analogique $H_A(p)$
2. Transformation $H_A(p) \rightarrow H_N(z)$
   conservant certaines propriétés de $H_A(p)$ à $H_N(z)$.

ou

Conservation d'une réponse temporelle

Conservation d'une réponse harmonique

III – Filtres RII (IIR) : 3) Synthèse



- **Ordre du filtre et fonction de transfert normalisée**
  - Butterworth, Chebyschev, Elliptique, Bessel, Legendre, ...
  - $H_{NORM}(p_N)$
- **Dénormalisation**
  - Passe-bas : $p_N = p / \omega_c$
  - Passe-haut : $p_N = \omega_c / p$
  - Passe-bande : $p_N = 1/B\,(p / \omega_0 + \omega_0 / p)$
- **On obtient une fonction de transfert H(p) respectant le gabarit analogique spécifié**

$\Rightarrow$ **Passage vers H(z)**

III – Filtres RII (IIR) : 3) Synthèse par invariance à une entrée

On cherche : $s_N(n) = s_A(nT_e)$ pour une entrée de référence
$e(n) = e(t = nT_e)$

$$H_N(z) = \frac{TZ\{E(p)H_A(p)\}}{TZ\{E(p)\}}$$

Invariance impulsionnelle : $H_N(z) = TZ\{H_A(p)\}$

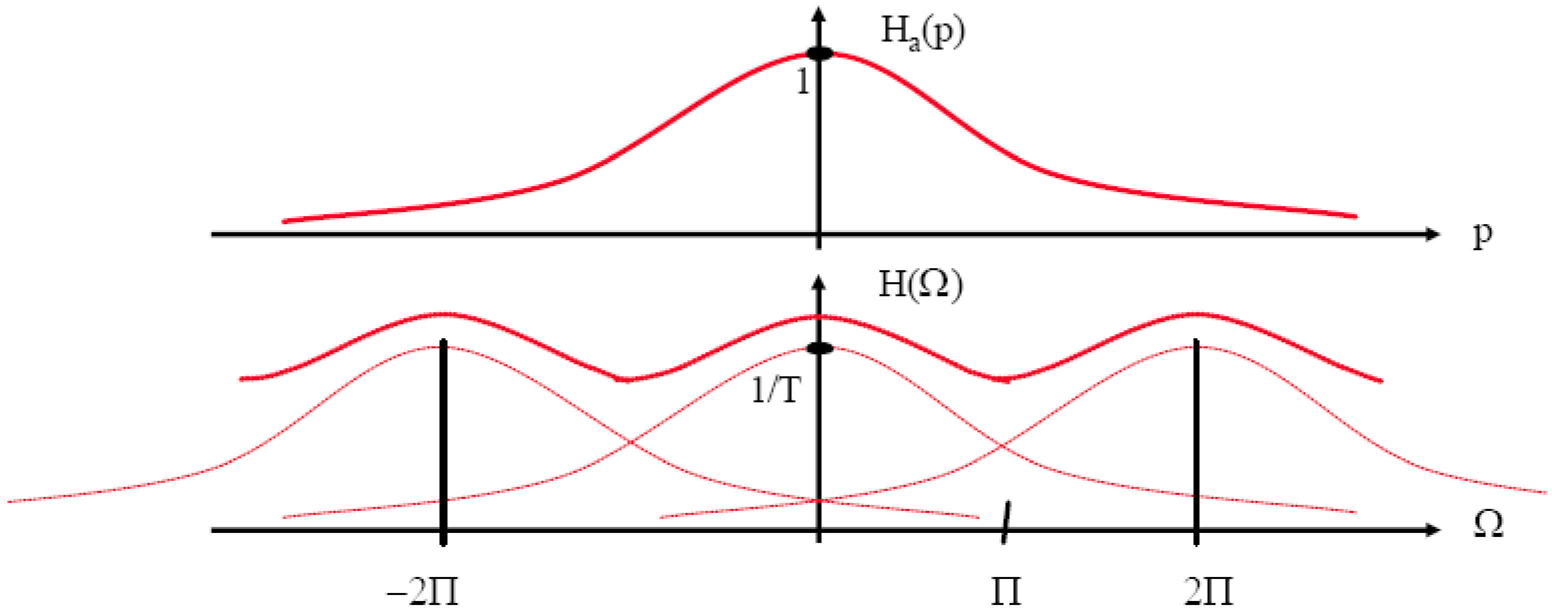
Invariance indicielle : $H_N(z) = (1-z^{-1})TZ\{H_A(p)/p\}$

Filtre numérique a la même réponse de référence choisie que le filtre analogique correspondant.

III – Filtres RII (IIR) : 3) Synthèse par invariance à une entrée

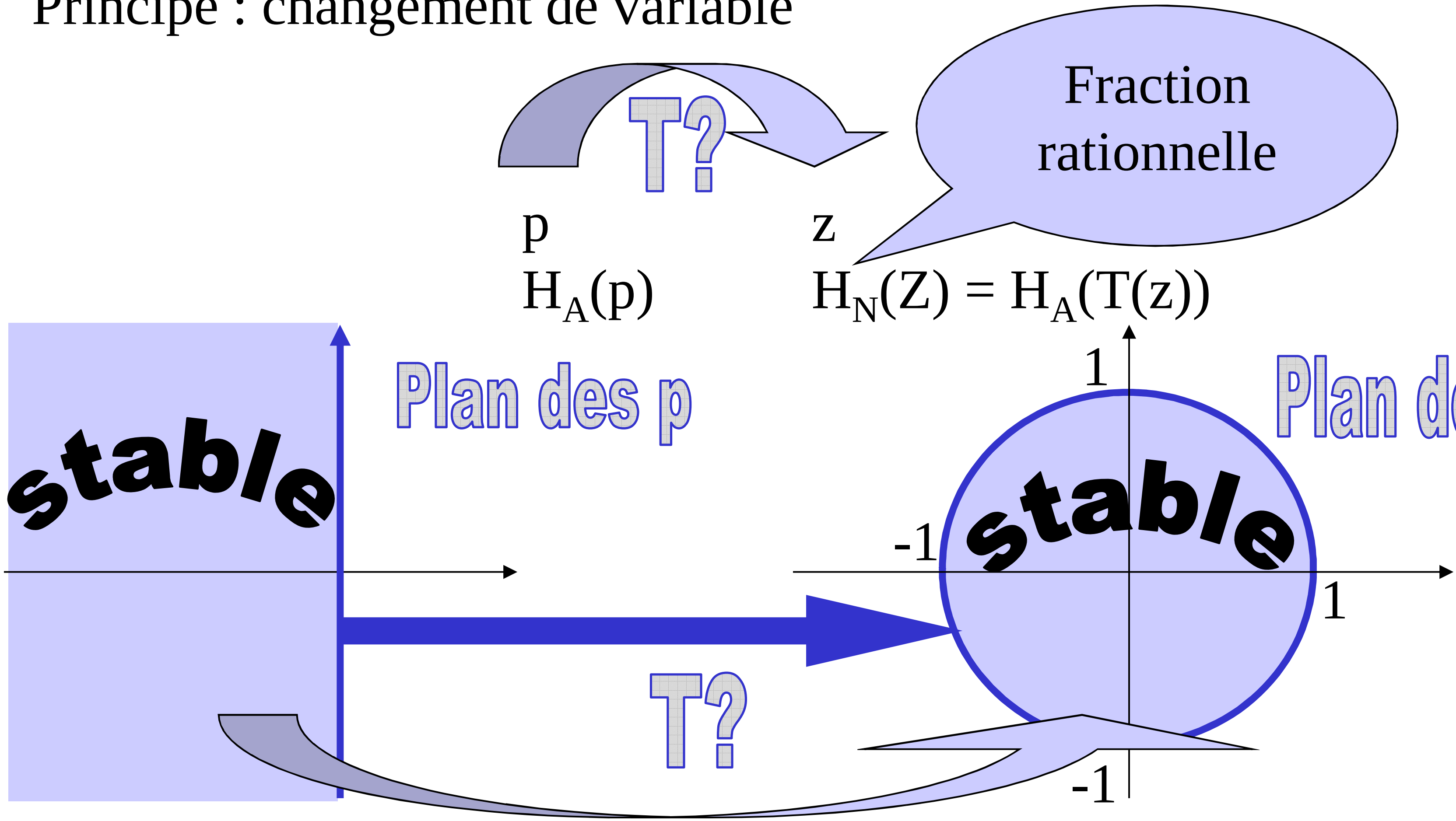
Invariance impulsionnelle

Les filtres analogique et numérique ont la même réponse impulsionnelle :
-Conserve la réponse temporelle et la stabilité
- mais…phénomène de recouvrement de spectre dû à l'échantillonnage,
- Non respect de la spécification fréquentielle !



III – Filtres RII (IIR) : 3) Synthèse par conservation de la réponse harmonique

Principe : changement de variable



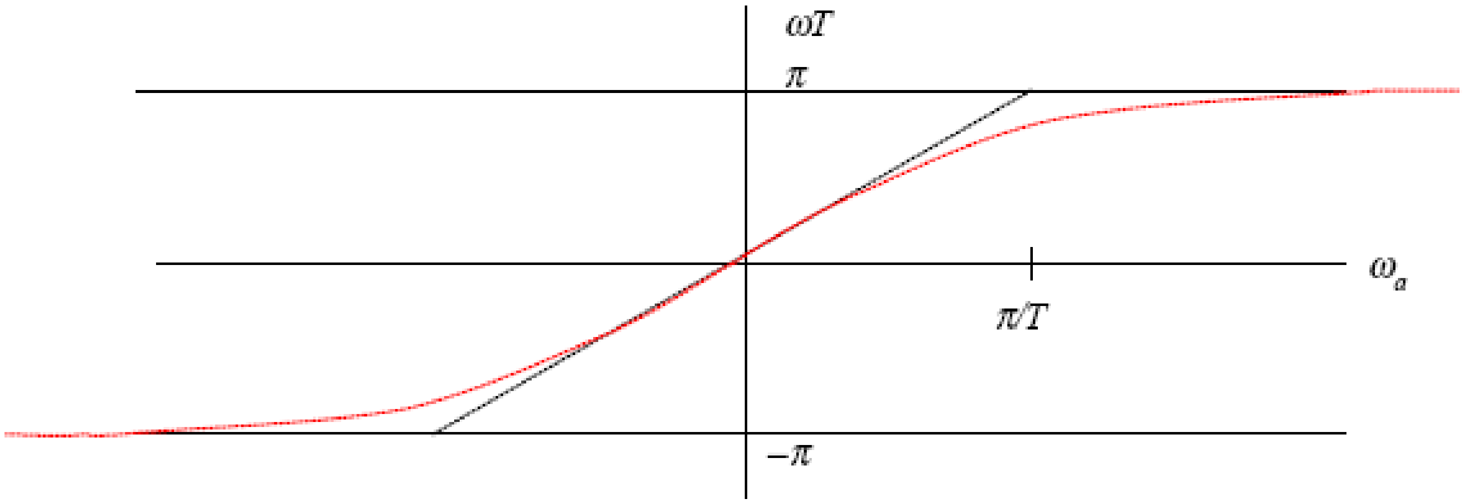
III – Filtres RII (IIR) : 3) Synthèse par conservation de la réponse harmonique

Transformer une droite en cercle : transformation homographique, appelée **Transformée bilinéaire**

$$p = c\,\frac{1- z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

Souvent $c = 2/T_e$

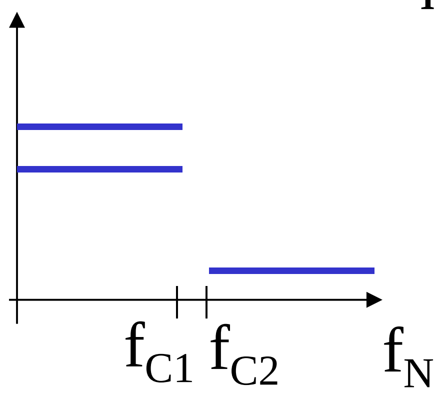
$f_A = F_e/\pi \ \tan(\pi \tilde{f}_N)$: préserve les basses fréquences



III – Filtres RII (IIR) : 3) Synthèse par conservation de la réponse harmonique

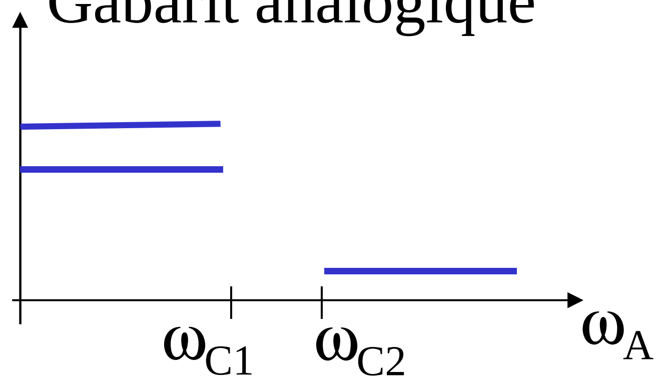
❶ à partir du gabarit numérique, construire gabarit analogique

Gabarit numérique



$$\omega_A = 2F_e \tan(\pi \tilde{f}_N)$$

Gabarit analogique



❷ synthétiser un filtre analogique satisfaisant (modèle ?)

Choix d'un modèle analogique,
Calcul de $H_A(p)$

$$p = \frac{2}{T_e}\,\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

$H_N(z)$

❸ changer *p* en *z* par la bilinéaire

FILTRES R.I.I.

➢ **Prototypes de filtres analogiques**

- **Butterworth**

Pas d'ondulation $|H(\omega)|^2 = 1/[1+(\omega/\omega_c)^{2n}]$ n ordre du filtre, ω_c pulsation de coupure à –3 dB, pôles sur le cercle unité

- **Tchebychef**

$|H(f)|^2 = 1/[1+\varepsilon^2 T^2_n(f)]$ *avec* $T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$

Relation de récurrence sur T_n : $T_{n+1} = 2x\,T_n(x) - T_{n-1}(x)$

Passent + facilement dans le gabarit que Butterworth pour même ordre

- **Elliptiques (Cauer)**

$|H(f)|^2 = 1/[1+\varepsilon S_n(f,k)]$ k *: sélectivité du filtre*

À gabarit donné, ordre du filtre le moins élevé

- **Bessel**

Phase à peu près linéaire, TPG constant

Mais mauvaise caractéristique de module

Optimisation des RII : En moyenne quadratique

Critère à minimiser :

$$J(\theta) = \sum_{n=0}^{N_0-1} P^2(n) \left| H(\tilde{f}_n) - H_I(\tilde{f}_n) \right|^2$$

Le vecteur θ contient les paramètres du filtre

P : pondération spectrale à choisir

H_I : filtre idéal

H : filtre à optimiser

Méthodes du gradient

Cas des RII : stabilité des solutions

Algorithmes d'optimisation ne garantissent pas stabilité de la solution
$\rightarrow$ changer le vecteur paramètre : prendre les pôles + contrainte
$\rightarrow$ plus simple : stabiliser une solution instable en conservant module du filtre inchangé.

Si p pôle instable,

$$H(z) = \frac{1}{1-pz^{-1}} \; G(z) \quad \text{avec } |p| > 1$$

« réfléchir » ce pôle dans le cercle unité : changer p en p^{-1*}

passe-tout de module unité : $H_{PT}(z) = \dfrac{1}{p} \; \dfrac{1-pz^{-1}}{1-p^{-1*}z^{-1}}$

donc

$$H'(z) = H(z)\, H_{PT}(z) = G(z) \frac{1}{p(1-p^{-1*}z^{-1})}$$

si appliqué aux zéros : filtre à minimum de phase.

IV – Filtres RII (IIR) : Implantation

Nécessité de fractionner en structures plus petites

⌧**Formes décomposées**

➲ ***Série (cascade)***

$H(z) = C\Pi\ H_i(z)$

propagation des erreurs

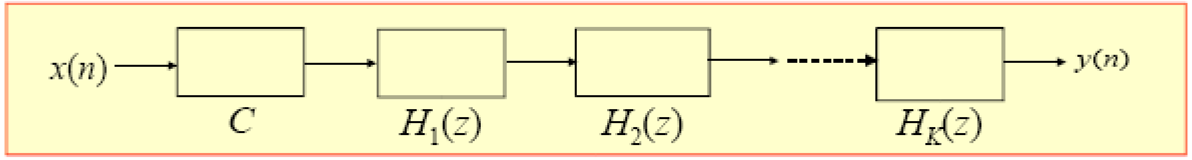
➲ ***Parallèle***

$H(z) = C + \Sigma\ H_i(z)$

Éléments simples du 1er ou 2nd ordre

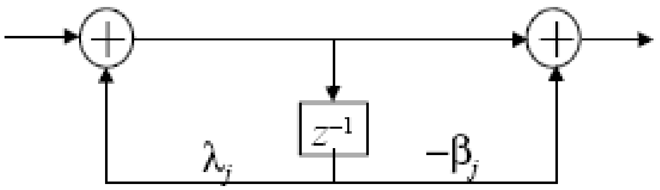
$$\frac{1+b_1\, z^{-1} + b_2\, z^{-2}}{1+a_1\, z^{-1} + a_2\, z^{-2}}$$

Obtenue en factorisant numérateur et dénominateur de *H(z)* et en mettant sous forme de produits de FT élémentaires



FT du 1er ordre

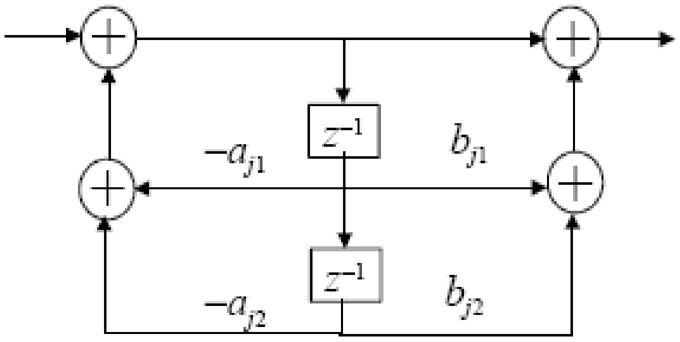
$$H_j(z) = \frac{1-\beta_j z^{-1}}{1-\lambda_j z^{-1}}$$



FT du 2ème ordre

$$H_j(z) = \frac{1+b_{j1}z^{-1}+b_{j2}z^{-2}}{1+a_{j1}z^{-1}+a_{j2}z^{-2}}$$

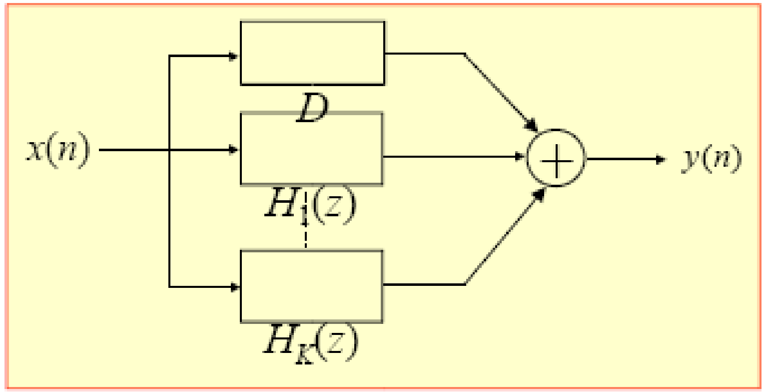
pour les pôles ou zéros complexes conjugués



IV – Filtres RII (IIR) : Implantation

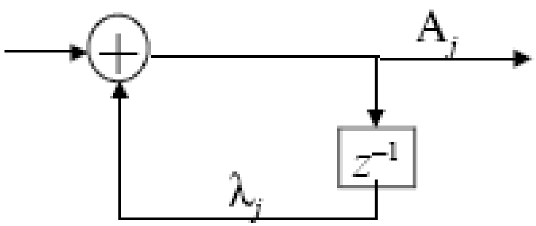
Décomposition en parallèle

Obtenue en décomposant *H(z)* en éléments simples



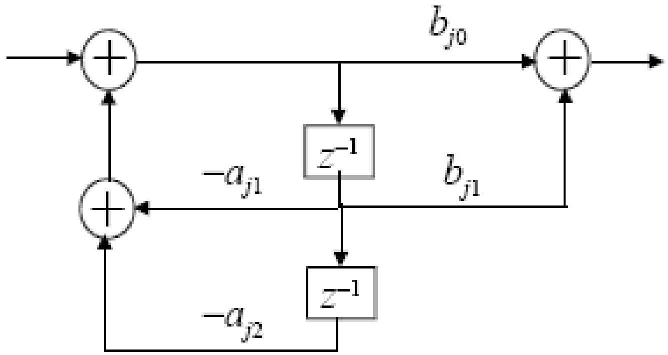
FT du 1er ordre

$$H_j(z) = \frac{A_j}{1-\lambda_j z^{-1}}$$



FT du 2ème ordre

$$H_j(z) = \frac{b_{j0} + b_{j1} z^{-1}}{1 + a_{j1} z^{-1} + a_{j2} z^{-2}}$$



Sources d'erreur dans l'implémentation des filtres

- Erreurs de quantification des coefficients du filtre

  La sensibilité du filtre par rapport à la quantification dépend de sa structure de réalisation et de la localisation des pôles et zéros. La quantification introduit une modification des coefficients du filtre qui se traduit par une modification des pôles et des zéros et donc de la réponse en fréquence

- Bruit de calcul au niveau des opérations élémentaires

- Bruits de conversion analogique-numérique du signal d'entrée $x(n)$

Erreur de quantification : cas général

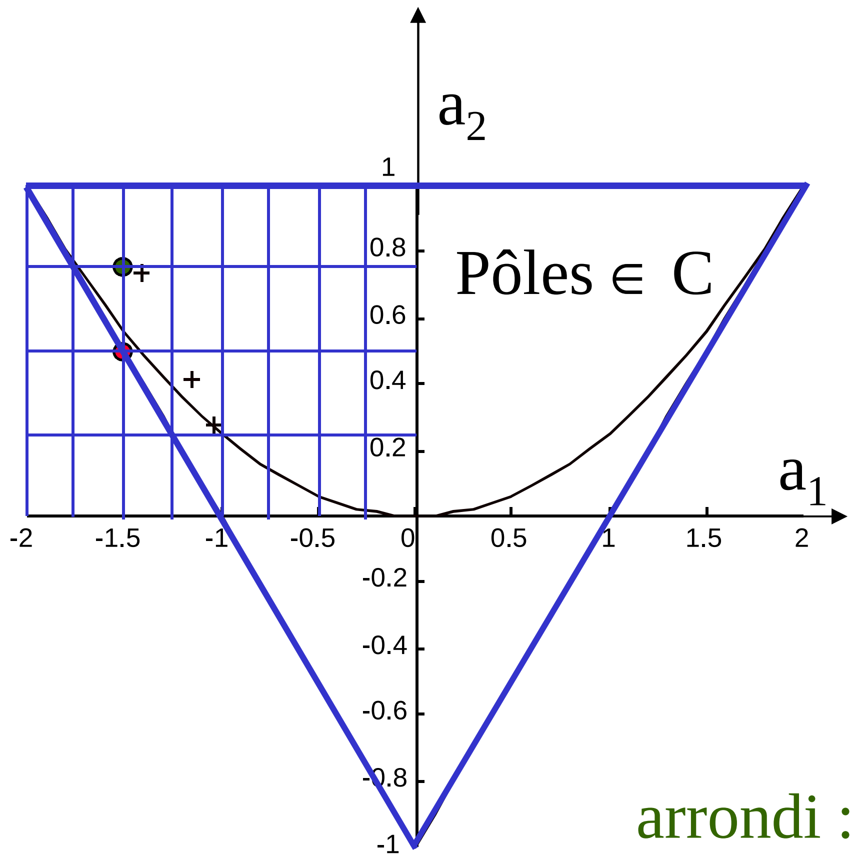
Erreur de quantification E $\quad E_a = Q(a) - a \quad$ avec a valeur à quantifier, $Q(a)$ valeur quantifiée

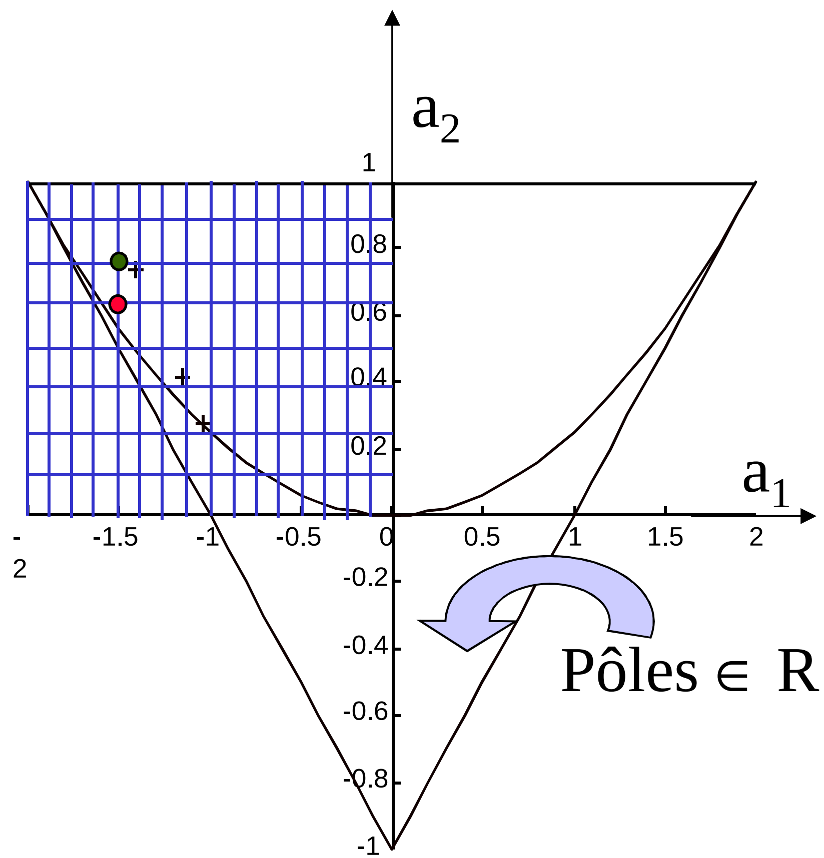
L'erreur de quantification dépend :

- du type de quantification : quantification par troncature ou par arrondi
- du nombre de bits utilisés pour coder les nombres
- du type de codage des nombres : virgule fixe ou virgule flottante

Stabilité de la cellule du second ordre

Dans le plan (a_1,a_2), intérieur du triangle





2 bits après la virgule
(+/-)xx,xx

arrondi :
coin le plus proche
troncature :
coin en bas, à gauche

3 bits après la virgule
(+/-)xx,xxx

Amélioration de la précision : quelques règles

Le bruit de calcul peut être atténué en agissant sur les paramètres suivants :

- utiliser une structure de réalisation en cascade ou en parallèle

- appairer les pôles et zéros pour constituer une cellule élémentaire

  Construire des structures où le pôle le plus proche du cercle unité est appairé avec le zéro le plus proche de lui.

- ordonner judicieusement les cellules pour une structure en cascade

  Mettre l'ensemble des structures en cascade dans l'ordre de proximité (croissante ou décroissante) des pôles par rapport au cercle unité

- minimiser les problèmes de débordement (éviter l'écrêtage des nombres dû à la limitation de la valeur maximale pouvant être stockée dans une mémoire interne du processeur)

alors RIF ou RII ?

Critère	**R.I.F**	**R.I.I.**
Maîtrise de la phase	**Oui**	Non
Complexité	Très faible Calcul possible par **TFD**	Faible
Stabilité	Toujours	Risque de problème en cas de précision de calcul insuffisante
Nombre de coefficients nécessaires	Moyen	**faible**
Précision nécessaire pour les calculs	Moyenne	Assez grande
Adapté au multi-cadence	**Oui**	Non

Analyse Spectrale par Transformation de Fourier (déterministe)

$$X(f) = \int_{\Re} x(t) e^{-i2\pi f t} dt \approx \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_E).e^{-i2\pi n f T_E}$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-i2\pi n k / N}$$

$$k = 0, \ldots, N-1$$

Fenêtres de pondération :

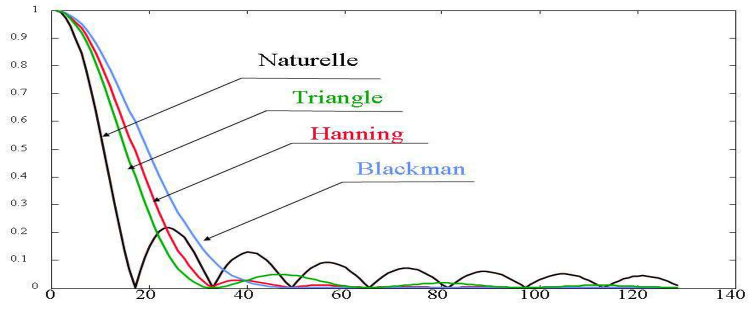
$$x_F(n) = x(n).w(n)$$

avec $w(n) \equiv 0$ pour $n \notin [0, N-1]$

$$TFD\left[e^{i2\pi f_0 n}\right] = W(k - k_0)$$

avec $f_0 = k_0 / N$

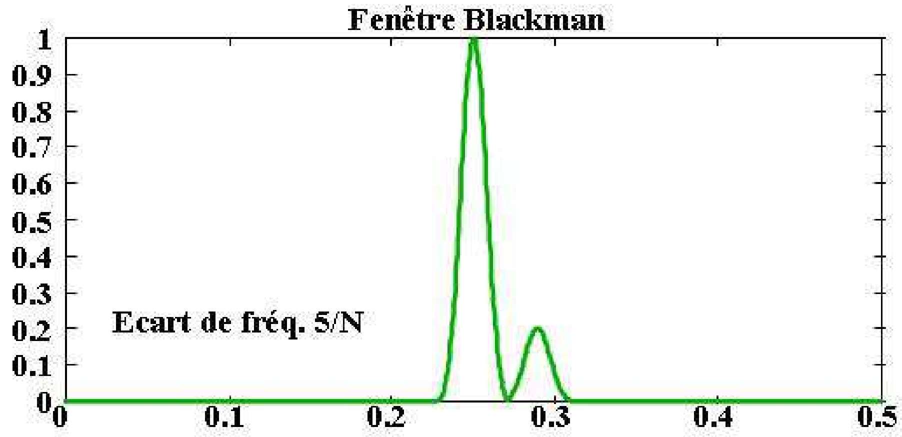
$$\boxed{\Delta f \approx Cte / N}$$

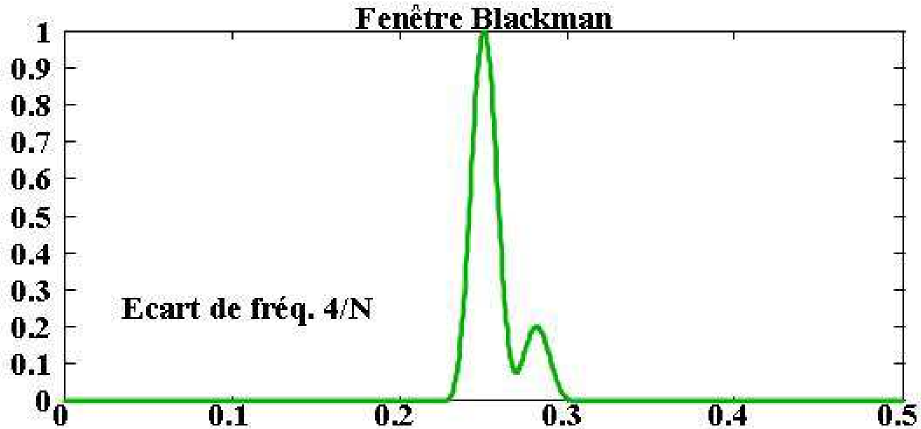


Analyse Spectrale par Transformation de Fourier (déterministe)

2 fréquences pures vues avec :

$$\boxed{\Delta f \approx Cte / N}$$





Fenêtres usuelles et leurs caractéristique

- Pour chaque fenêtre *w(n)* définie sur [-(*M-1)*, *M-1*], le tableau ci-dessous donne la largeur à -3 dB du lobe principal (en fractions de *N*=2*M*-1) et le niveau du premier lobe latéral par rapport à celui du lobe principal.

Window	Characteristics	$\frac{\text{amp. sidelobe}}{\text{amp. main lobe}}$	ΔB_{3dB}
Rectangular	$w(m) = 1$	-13dB	0.89
Bartlett	$w(m) = 1 - \frac{\lvert m \rvert}{M}$	-26dB	1.27
Hanning	$w(m) = 0.5 + 0.5\cos(\pi\frac{m}{M})$	-31.5dB	1.41
Hamming	$w(m) = 0.54 + 0.46\cos(\pi\frac{m}{M})$	-42dB	1.31
Blackman	$w(m) = 0.42 + 0.5\cos(2\pi\frac{m}{M}) + 0.08\cos(4\pi\frac{m}{M})$	-58dB	1.66

Analyse Spectrale par Transformation de Fourier
Cas stochastique stationnaire

Deux théorèmes :

$$\begin{cases} S_x(f) = TF(R_x(\tau)) & \textit{Analyse Spectrale par corrélation} \\ \lim_{L\to\infty} \frac{1}{L} E\left[\left|X_L\right|^2\right] = S_x(f) & \textit{Analyse Spectrale par TFD} \end{cases}$$

1. Analyse Spectrale par corrélation

$$\hat{R}_x(m) = \frac{1}{L} \sum_{n=m}^{N-1} x(n)x(n-m)^*$$

avec $L = N$ ou $L = N - m$

$m = 0, \ldots, N-1$

$$E\left[\hat{S}_x(f)\right] = S_x(f) * W(f) \qquad Var\left[\hat{S}_x(f)\right] \approx S_x(f)^2 / N$$

Performances des estimateurs d'autocorrélation

- Biais et variance des estimateurs biaisé et non biaisé d'autocorrélation en fonction du rang *k*.

	estimateur 1 (biaisé)	estimateur 2 (non biaisé)
moyenne $E[\hat{r}_u(k)]$	$\left(1-\frac{k}{N}\right) r_u(k)$	$r_u(k)$
variance $Var[\hat{r}_u(k)]$ pour $k \ll N$	$\frac{1}{N} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left({r_u}^2(l) + r_u(l+k) r_u(l-k) \right)$	$\frac{N}{(N-k)^2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left({r_u}^2(l) + r_u(l+k) r_u(l-k) \right)$

Analyse Spectrale par Transformation de Fourier
Cas stochastique stationnaire

2. Analyse Spectrale par TF Directe

'Périodogramme'

$$S_{p,x}(k)=\frac{1}{N}\left|X_p(k)\right|^2$$

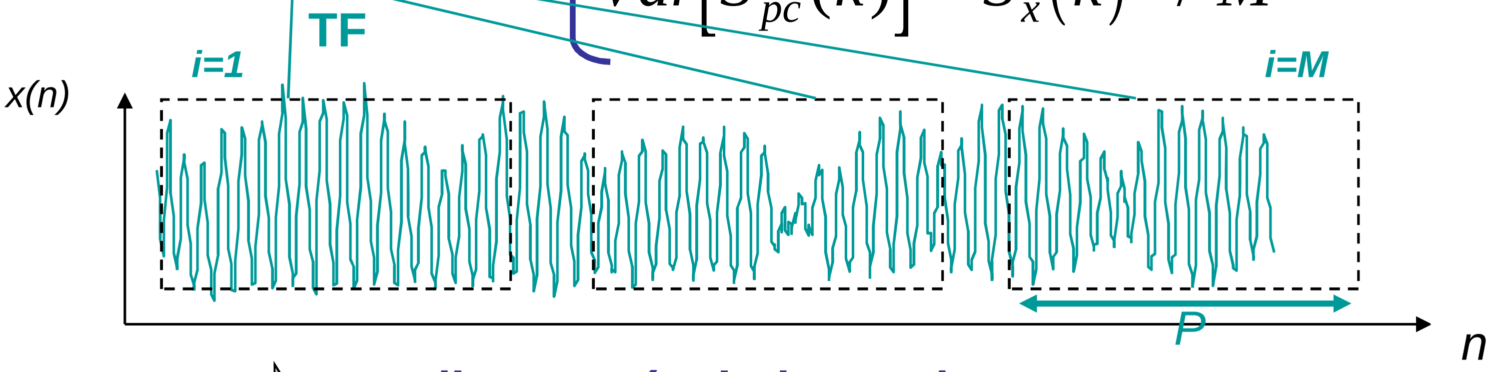
$$avec\,X_p(k)=TFD\left[x(n).w(n)\right]$$

$w(n)$ fenêtre de pondération

$$\Rightarrow \begin{cases} E\left[\hat{S}_{p,x}(k)\right]=S_x(k)*\left|W(k)\right|^2 \\ Var\left[S_{p,x}(k)\right]\geq S(k)^2 \quad \forall N \end{cases}$$

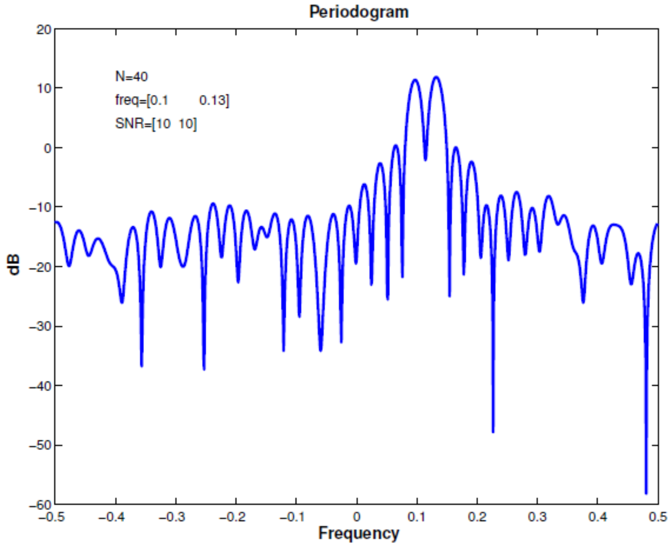
'Périodogramme cumulé'

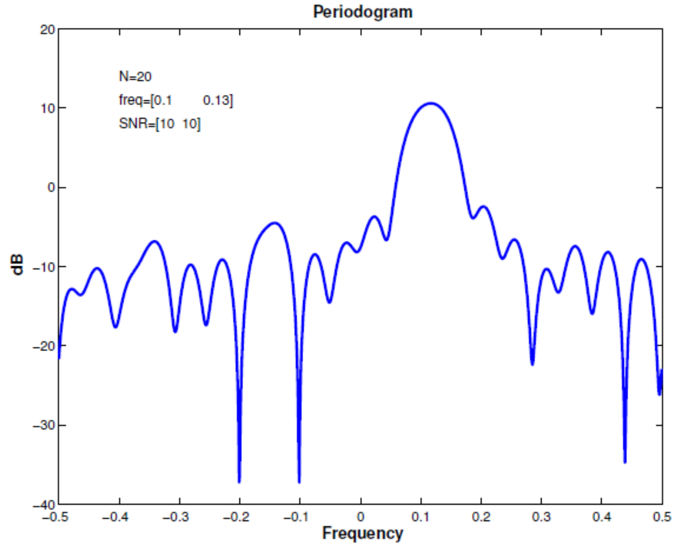
$$\hat{S}_{pc}(k)=\frac{1}{MP}\sum_{i=1}^{M}\left|X_i(k)\right|^2 \Rightarrow \begin{cases} E\left[\hat{S}_{pC,x}(k)\right]=S_x(k)*\left|W(k)\right|^2 \Rightarrow \Delta f\approx Cte/P \\ Var\left[\hat{S}_{pc}(k)\right]\approx S_x(k)^2\ /\ M \end{cases}$$

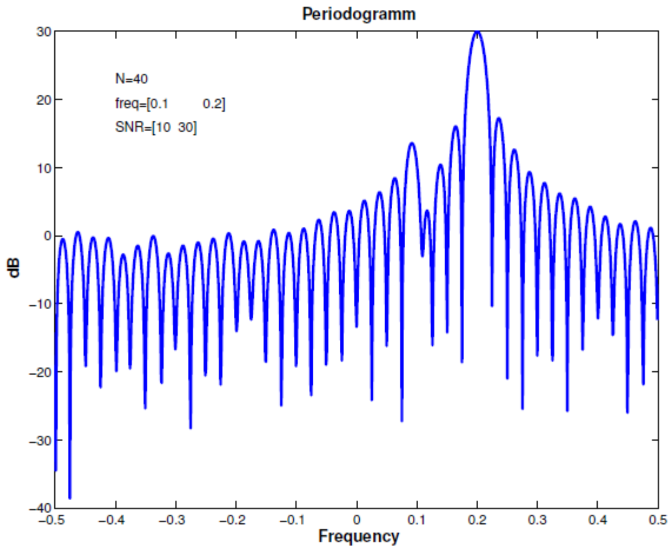


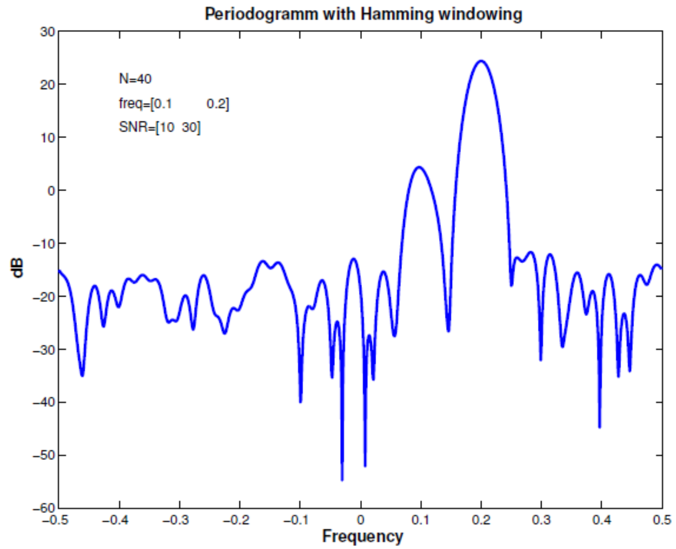
$\Rightarrow$ **Dilemme résolution-variance**

Effet du fenêtrage sur le périodogramme





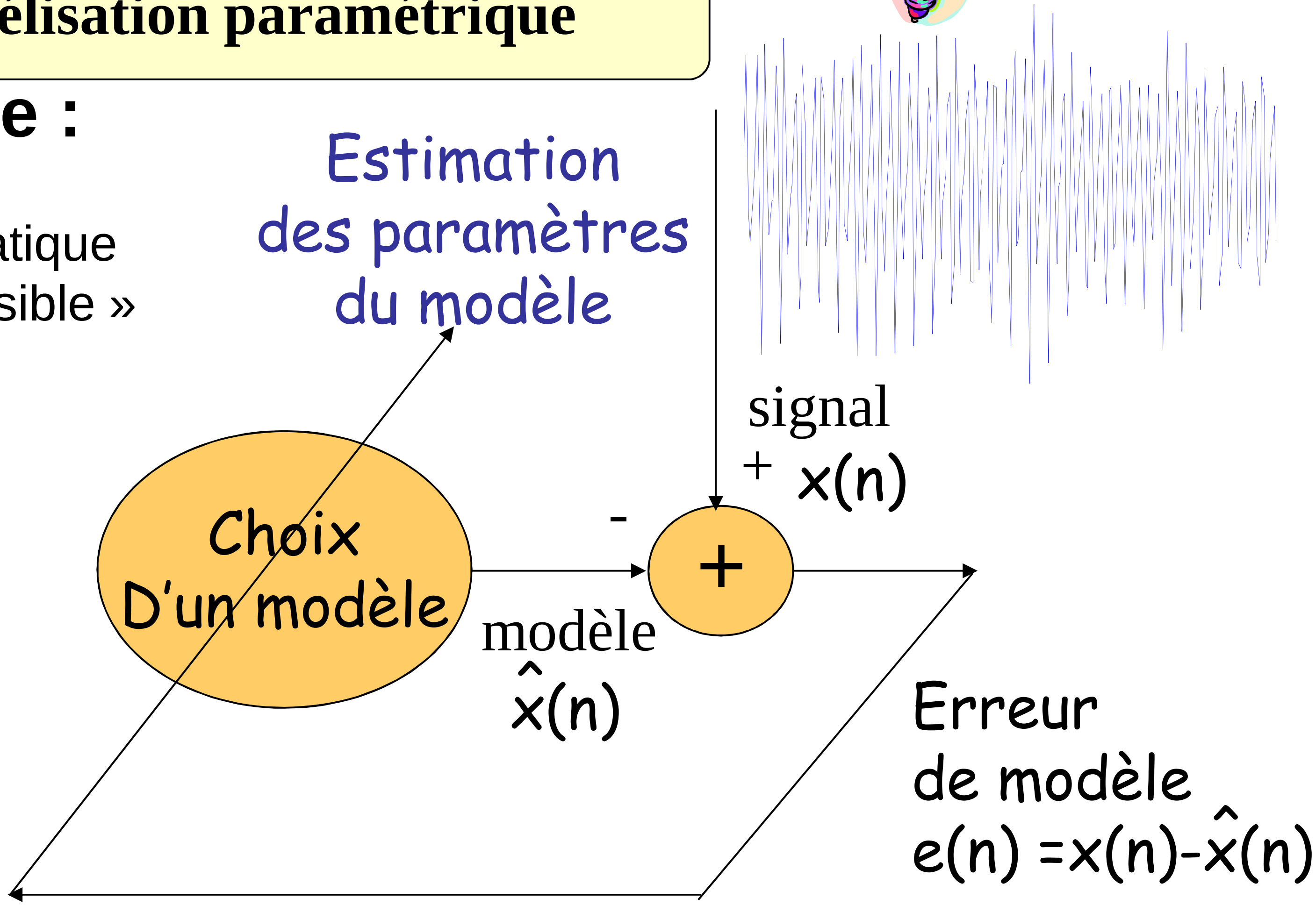




Modélisation paramétrique

Problématique :

Construire
un modèle mathématique
« collant le plus possible »
(au sens
d'un critère)
aux signaux
(numériques)
étudiés.



Analyse spectrale, Compression, Détection, Classification…

Modèle paramétrique générique

$$X(n)=f\left[X(n-1),\cdots,X(-\infty);\underbrace{B(n),B(n-1)\cdots}\right]$$

$$X(n)=f\left[X(n-1),\cdots,X(n-p),B(n),\cdots,B(n-q)\right]$$

$f[.]$ ***linéaire***

Modèle ARMA

$$X(n)=-\sum_{k=0}^{p}a_k X(n-k)+\sum_{k=0}^{q}b_k B(n-k)$$

$$E[B(n)]=0$$

$$\operatorname{cov}\left[B(n)\ B(m)\right]=\sigma_B^2\,\delta(n-m)$$

Modèle Auto-Régressif à Moyenne Ajustée (ARMA)

$$x(n) = -\sum_{k=1}^{p} a_k x(n-k) + \sum_{k=0}^{q} b_k e(n-k)$$

Bruit Blanc $e(n)$ $\longrightarrow$ $\boxed{\dfrac{B(z)}{A(z)}}$ $\longrightarrow$ *Modèle ARMA*

Estimateur Spectral

Autocorrélation :

$$K_e(\tau) = \sigma_e^2 \delta(\tau)$$

D.S.P. :

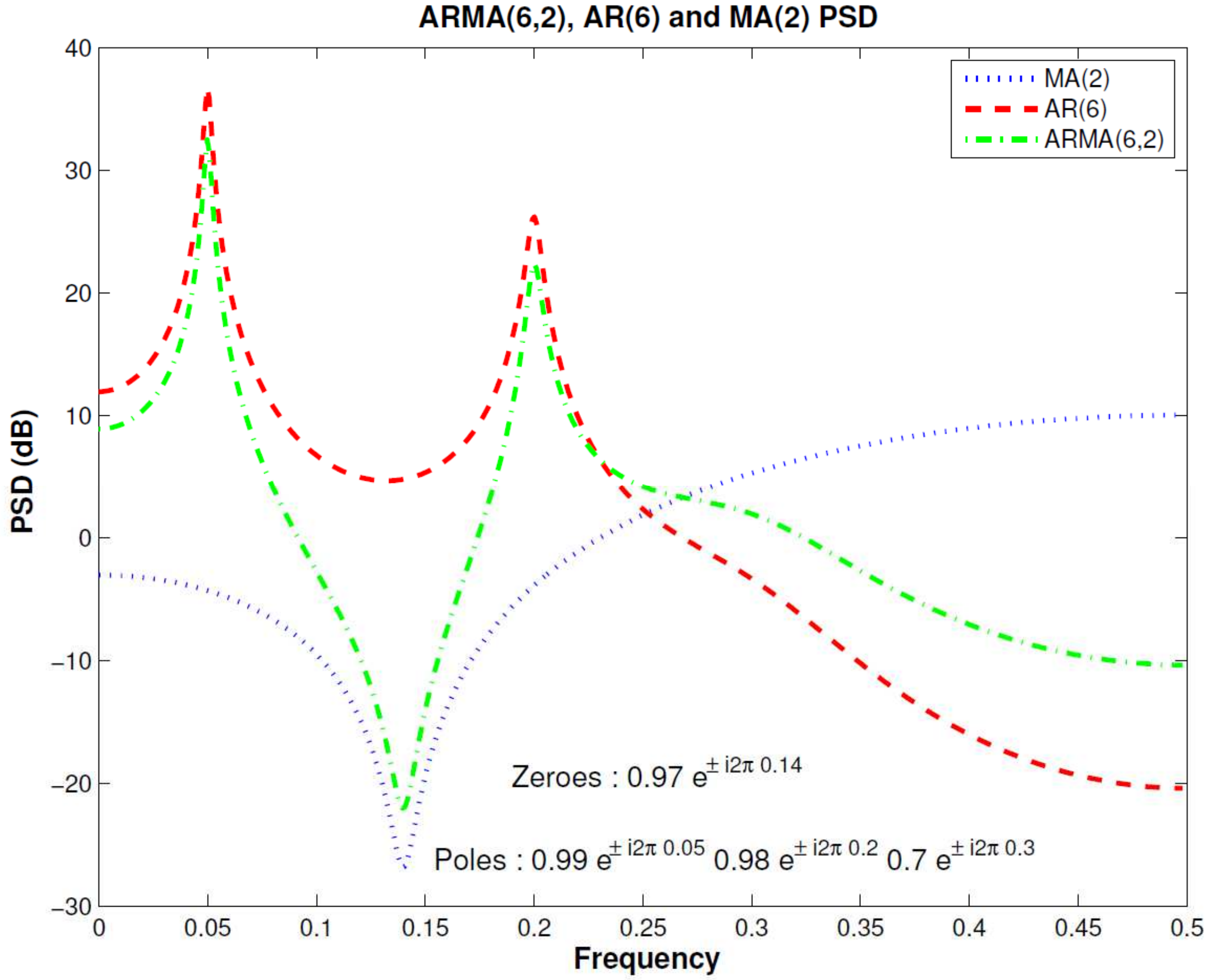
$$S_e(f) = \sigma_e^2$$

$$S_{ARMA}(f) = \sigma_e^2 \frac{\left| \sum_{k=0}^{q} b_k e^{i2\pi f k} \right|^2}{\left| 1 + \sum_{k=1}^{p} a_k e^{i2\pi f k} \right|^2}$$

Pb : estimation des paramètres ? b_k ?

choix des ordres (p,q) ?

Exemple de DSP d'un ARMA(p,q)



Propriétés ARMA

$$\boxed{X(n) = -\sum_{k=1}^{p} a_k X(n-k) + \sum_{k=0}^{q} b_k B(n-k)}$$

$$\boxed{X(n) \rightarrow S_X(z) = S_B(z)\ .\ H(z)\ \ H^*\left(1/z^* \right)}$$

$$S_X\left(e^{i2\pi f}\right) = \left| H\left(e^{i2\pi f}\right) \right|^2 .\sigma_B^2$$

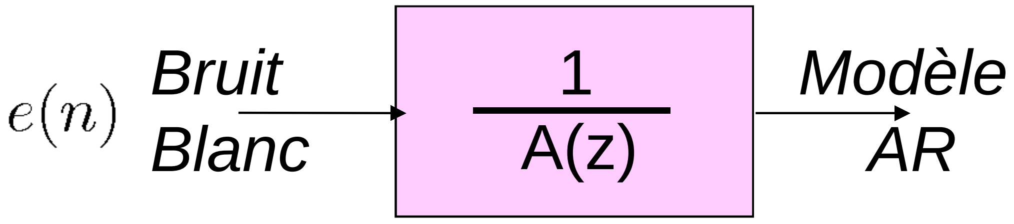
$$\boxed{R_X(m) = -\sum_{k=1}^{p} a_k R_X(m-k) + \left(\sum_{K=m}^{q} b_k h_{k-m} \right) \sigma_B^2}$$

$$\underline{\mathbf{r}} = \begin{vmatrix} R_X(q+1) \\ \vdots \\ R_X(q+p) \end{vmatrix} \qquad \mathbf{R} = \begin{vmatrix} R_X(q) & \dots & R_X(q+1-p) \\ R_X(q+1) & R_X(q) & \dots \\ R_X(q+p-1) & \dots & R_X(q) \end{vmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{r}} = -\mathbf{R}.\underline{\mathbf{a}} \qquad \underline{\mathbf{a}} = -\mathbf{R}^{-1}.\underline{\mathbf{r}}$$

Modèle Auto-Régressif (AR)

$$x(n) = -\sum_{k=1}^{p} a_k x(n-k) + e(n)$$



$$\underline{\mathbf{r}} = \begin{vmatrix} R_X(1) \\ \vdots \\ R_X(p) \end{vmatrix} \qquad \mathbf{R} = \begin{vmatrix} R_X(0) & \dots & R_X(1-p) \\ R_X(1) & R_X(0) & \dots \\ R_X(p-1) & \dots & R_X(0) \end{vmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{r}} = -\mathbf{R}.\underline{\mathbf{a}} \qquad \underline{\mathbf{a}} = -\mathbf{R}^{-1}.\underline{\mathbf{r}}$$

Estimateur Spectral

$$S_{AR}(f) = \frac{\sigma_e^2}{\left|1 + \sum_{k=1}^{p} a_k e^{i2\pi f k}\right|^2}$$

Estimation des paramètres :

a_k, $k=1,\ldots,p$ et σ^2_e

À l'aide d'algorithmes basés sur l'estimation de la corrélation.

Critères pour l'estimation de l'ordre *p*

Algorithme de Levinson-Durbin

Levinson algorithm

Inputs: $r_x(m)$, $m = 0, \cdots, p$

$a_1[1] = -\frac{r_x(1)}{r_x(0)}$, $P_{\mathsf{epl}}[1] = \left(1 - |a_1[1]|^2\right) r_x(0)$

for $k = 1, \cdots, p$ **do**

$$a_k[k] = -\frac{r_x(k) + \sum_{\ell=1}^{k-1} a_{k-1}[\ell] r_x(k-\ell)}{P_{\mathsf{epl}}[k-1]}$$

$$a_k[\ell] = a_{k-1}[\ell] + a_k[k] a^*_{k-1}[k-\ell] \quad \ell = 1, \cdots, k-1$$

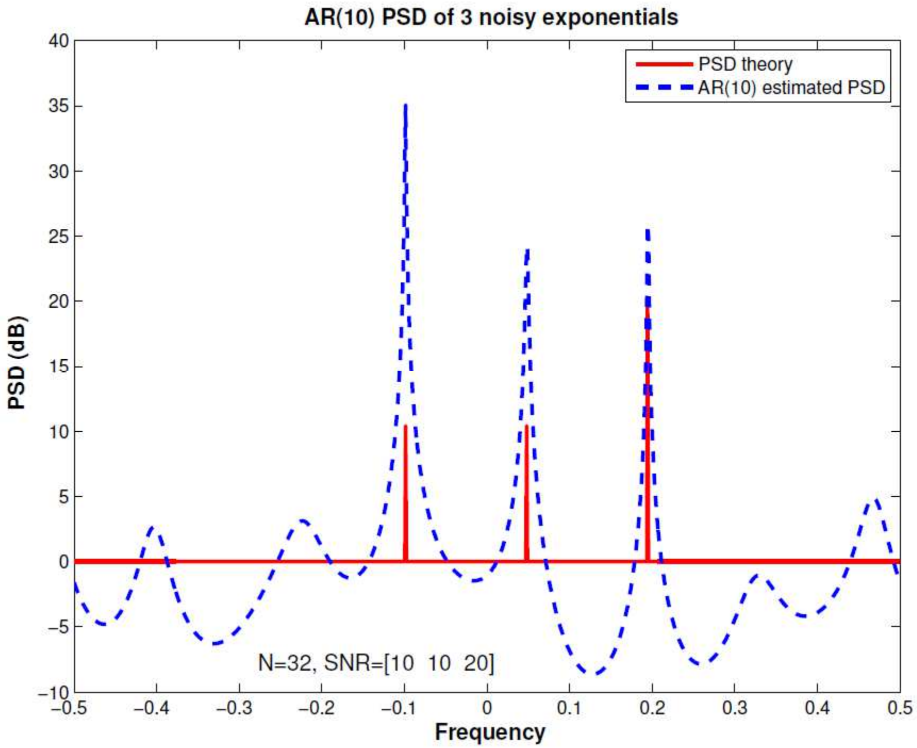
$$P_{\mathsf{epl}}[k] = \left(1 - |a_k[k]|^2\right) P_{\mathsf{epl}}[k-1]$$

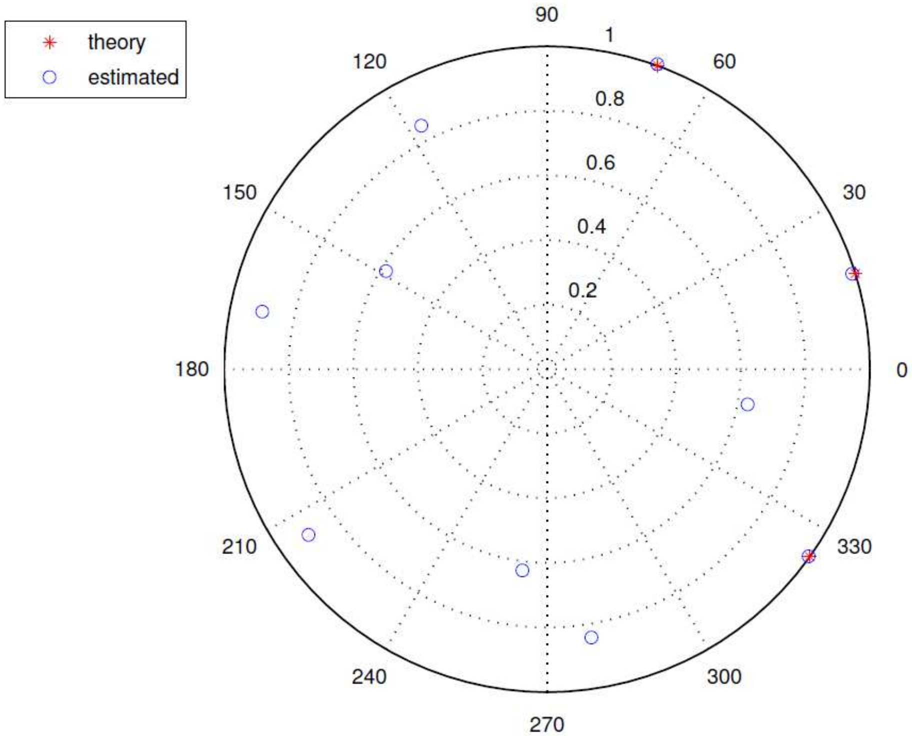
end for

Outputs: $\boldsymbol{a}_k = -\boldsymbol{R}_k^{-1} \boldsymbol{r}_k$ et $P_{\mathsf{epl}}[k]$ pour $k = 1, \cdots, p$ où

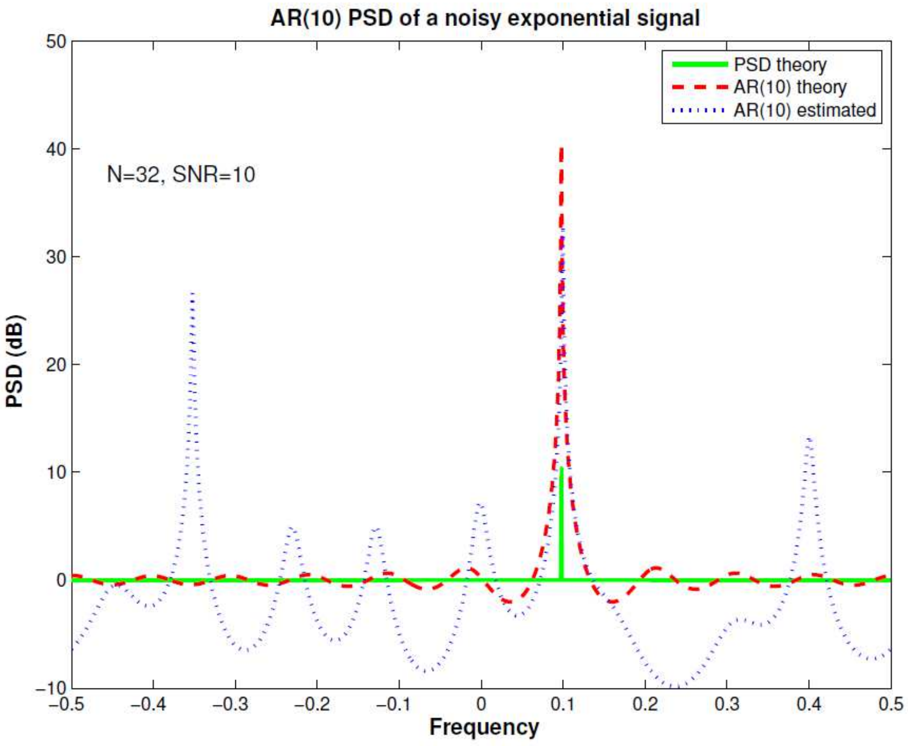
$\boldsymbol{R}_k(\ell, n) = r_x(\ell - n)$, $\boldsymbol{r}_k(\ell) = r_x(\ell)$, $\ell, n = 1, \cdots, k$.

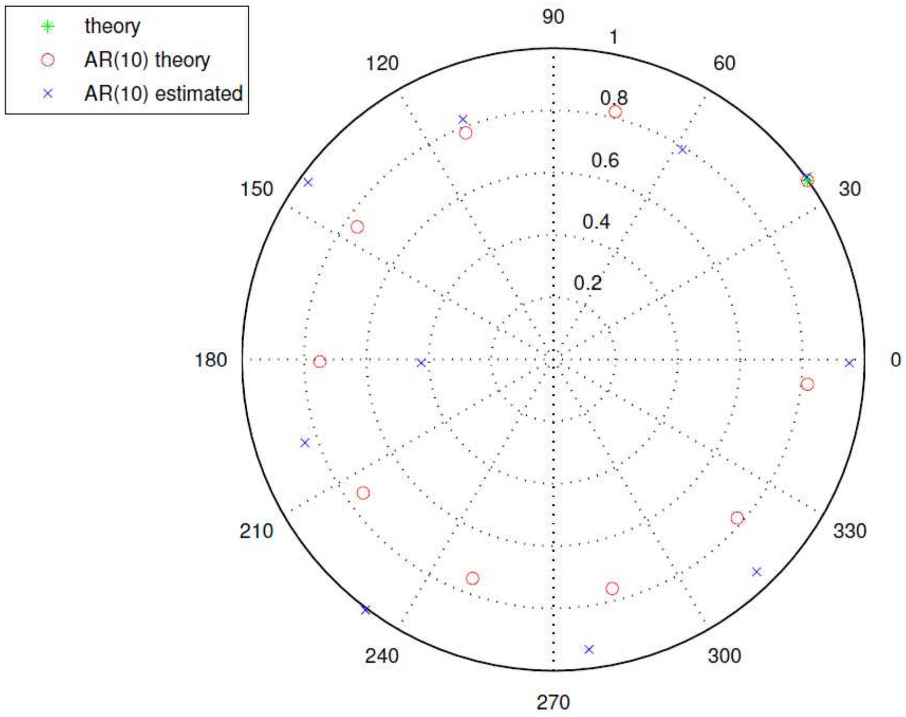
AR(10) de 3 exponentielles bruitées



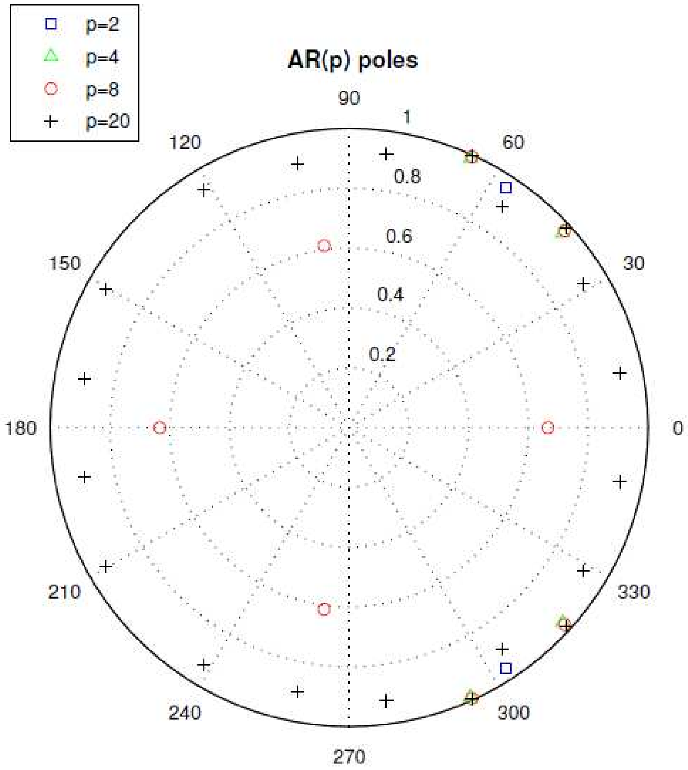


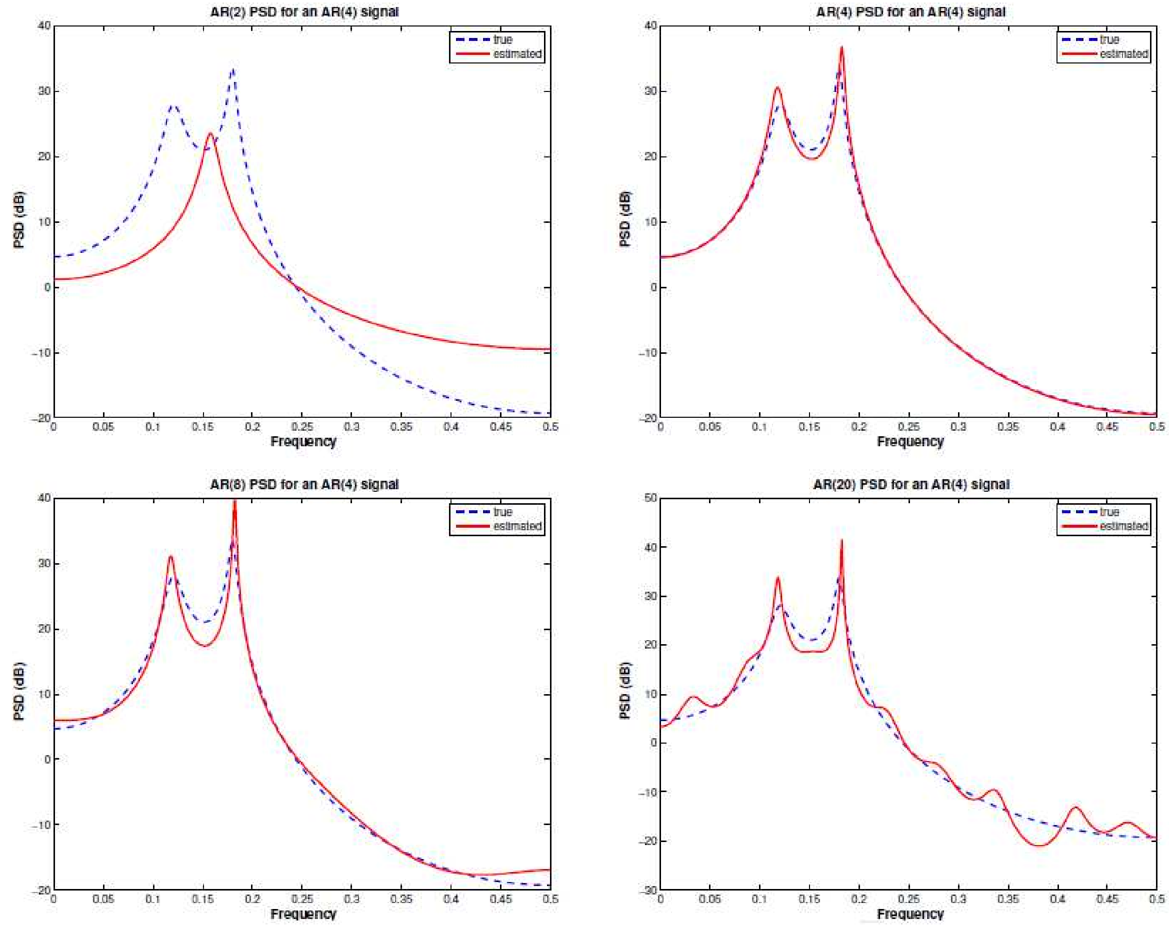
AR(10) d'une seule exponentielle bruitée



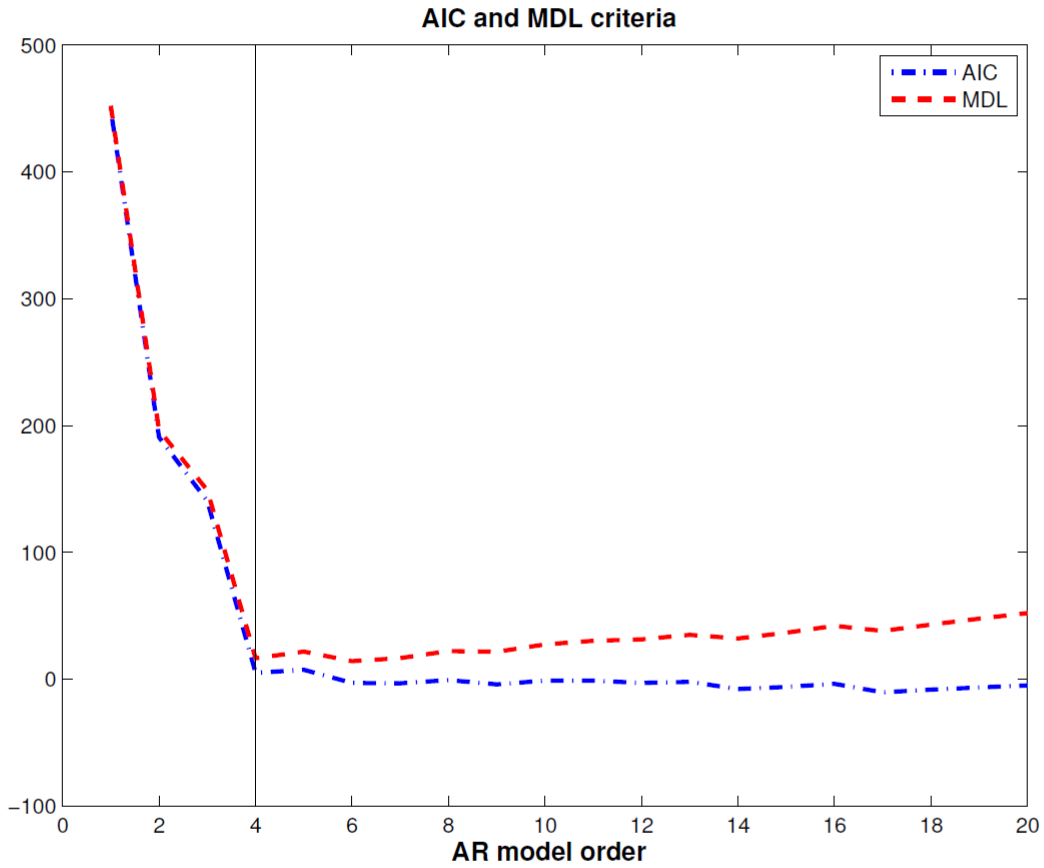


Choix de l'ordre



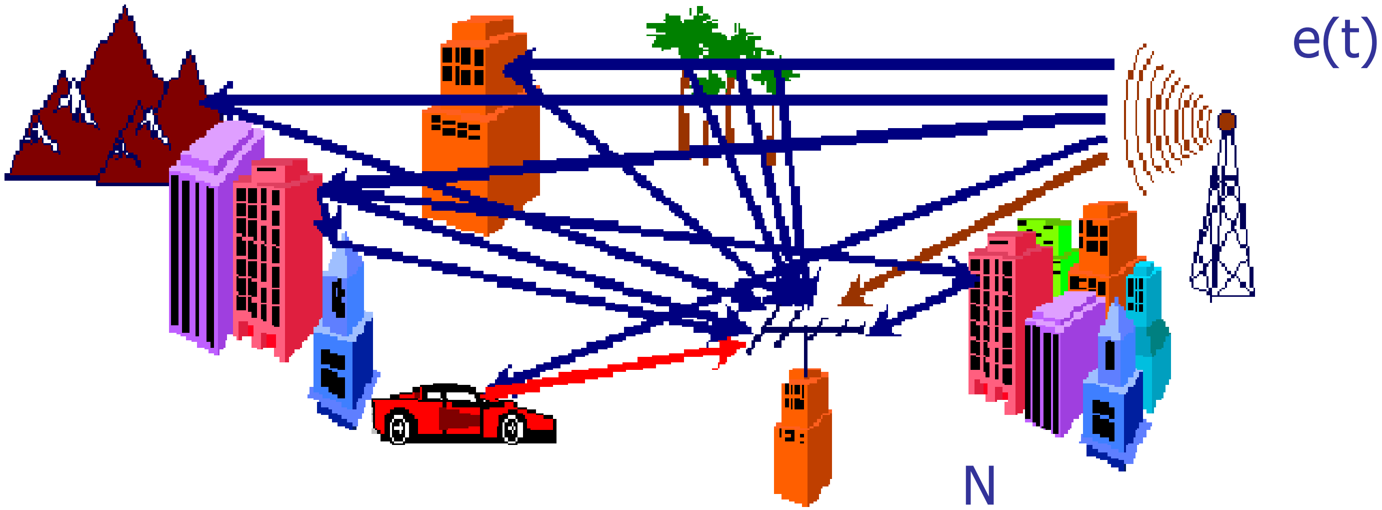


Choix de l’ordre

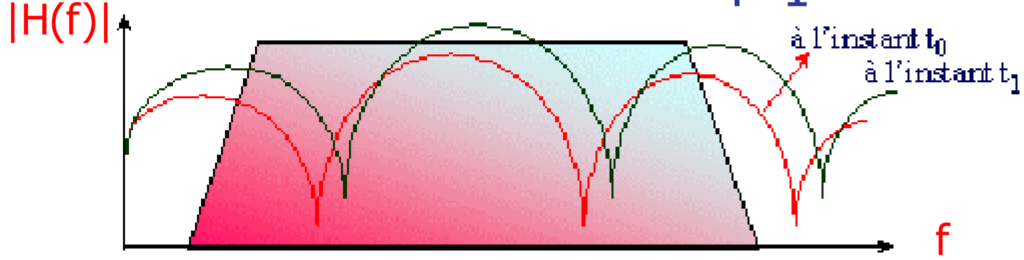


Modèles ARMA non stationnaires

Ex : Canal multi-trajets : sélectivité en fréquence



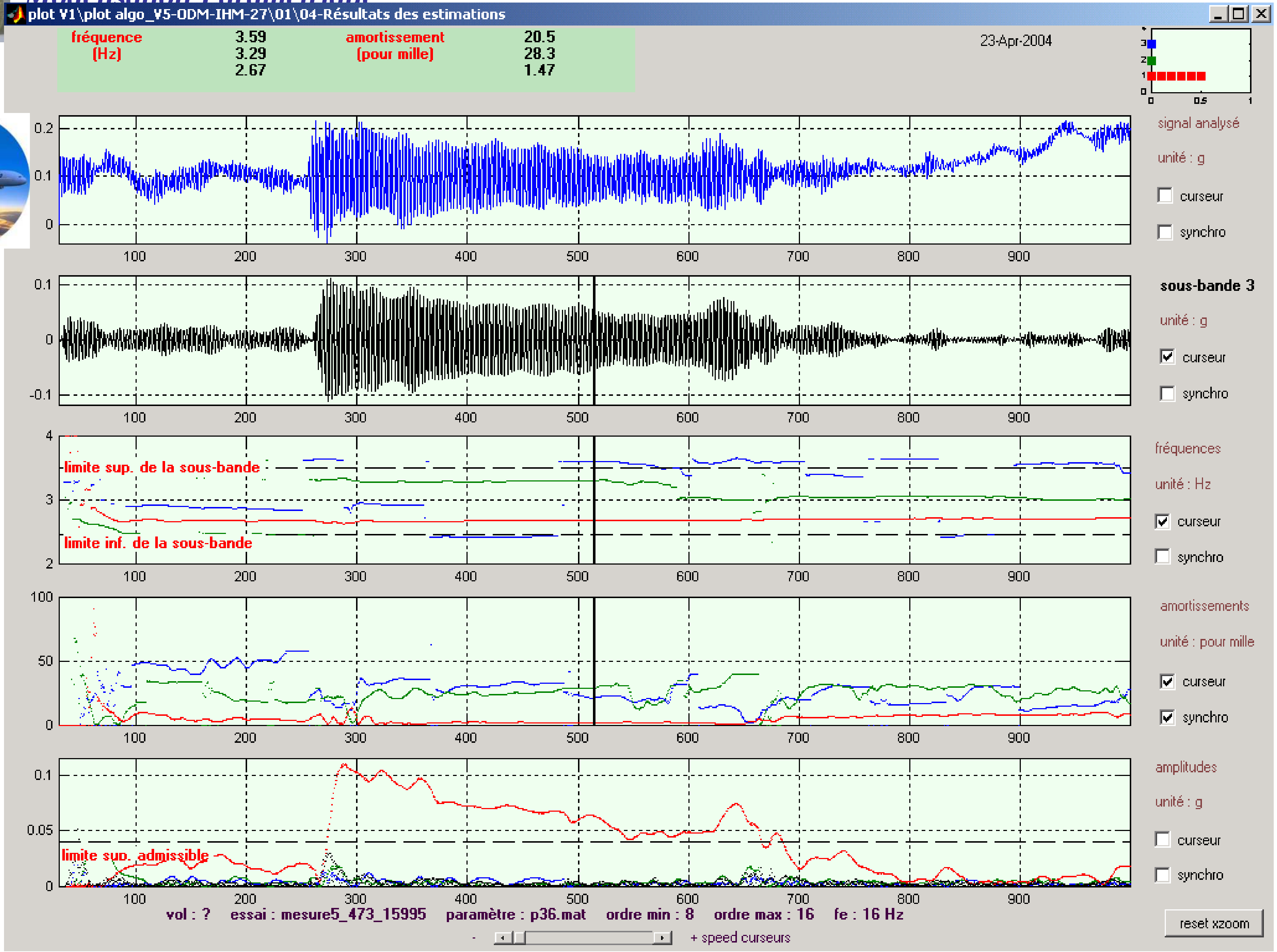
$$s(t) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i(t)\, e(t-\tau_i(t))$$



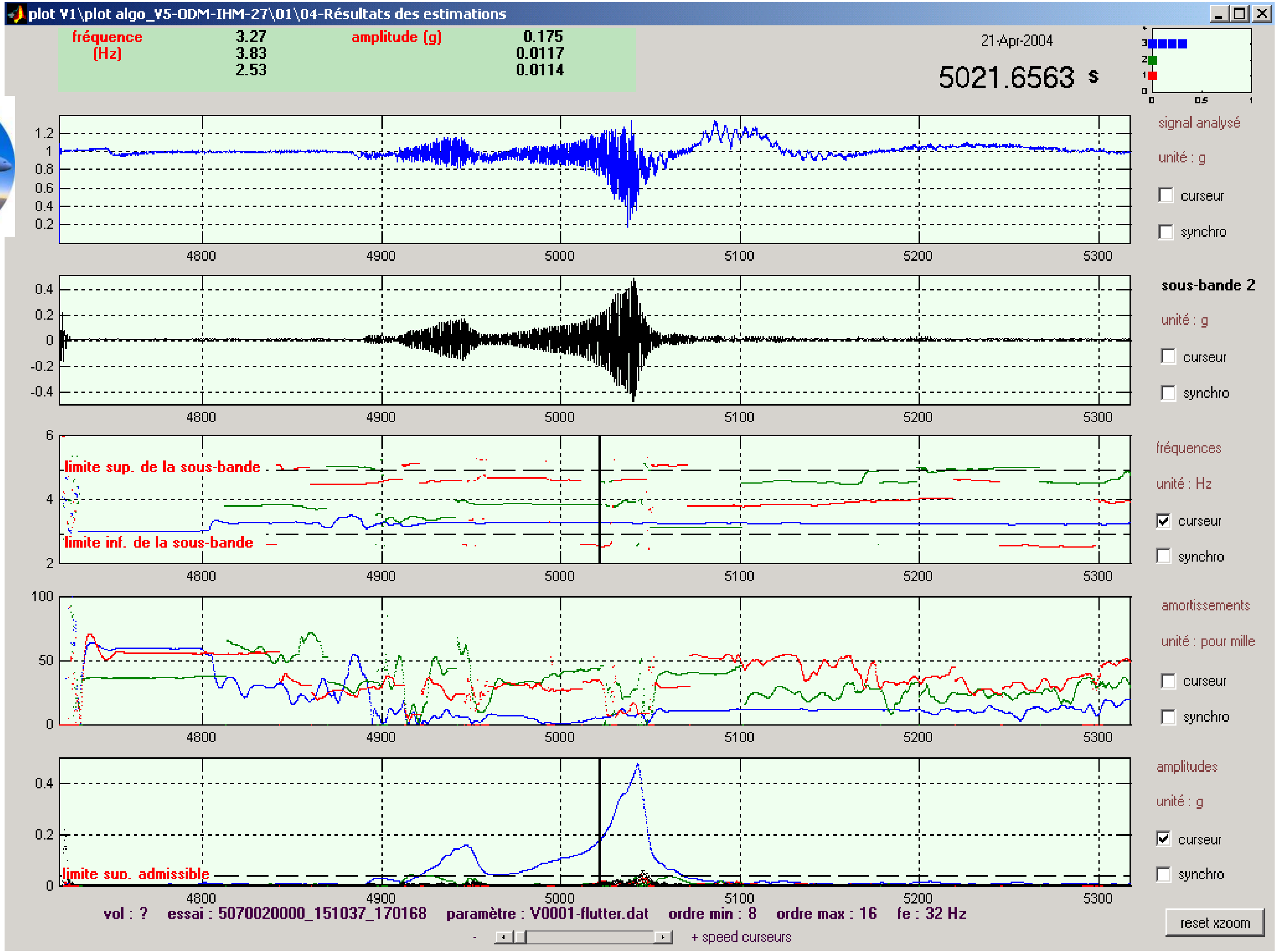
Exemple DVB-T : Délai max = 224 µs, Ds = 7.4 Mbauds, ISI = 1657 symboles

par Nath. Thomas

Modélisation Paramétrique

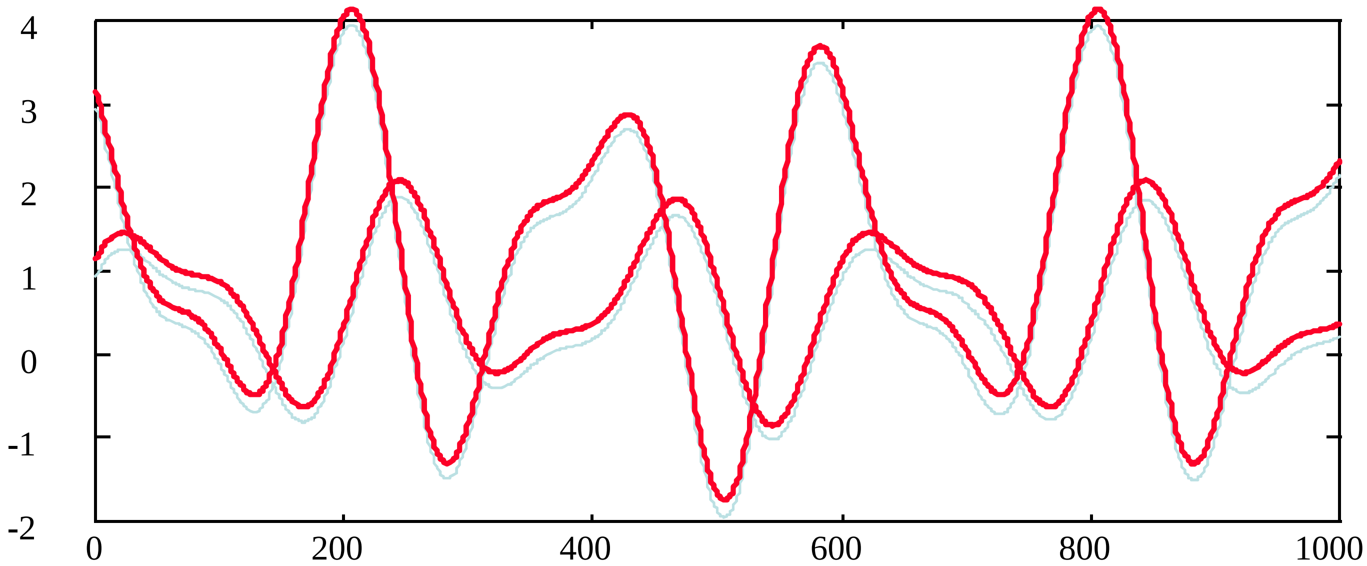


Modélisation Paramétrique



Canal sol-avion non-stationnaire

Filtrage linéaire variant dans le temps $y(n)= \Sigma\ h(n, k)x(n-k)$



true and **estimated** parameters of the time-varying channel

Modèle de Prony

Modèle déterministe :
Somme d'exponentielles complexes amorties

$$x(n) = \sum_{m=1}^{p} b_m Z_m^n + e(n)$$

ou

$$\begin{cases} R_X(k) = \sum_{m=1}^{p} b_m z_m^k + e(k),\ k \geq 0 \\ R_X(k) = R_X^*(-k) \end{cases}$$

$$Z_m = e^{-\alpha_m} e^{i2\pi f_m}$$ et $$b_m = A_m e^{j\phi_m}$$

Estimateur Spectral

$$S_{\text{Prony}}(f) = \sum_{m=1}^{p} b_m \left. \frac{1 - Z_m^2}{(1 - Z_m z^{-1})(1 - Z_m z)} \right|_{z = e^{i2\pi f}}$$

Intérêt : estimation de fréquences, amplitudes, phases et amortissements

Modèle de Prony

$$x(n) = \sum_{m=1}^{p} b_m Z_m^n + e(n)$$

$$s(n) = \sum_{m=1}^{p} B_m\, z_m^n \;,\; n \geq 0 \Leftrightarrow s(n) = -\sum_{k=1}^{p} a_k . s(n-k) \;,\; n \geq p+1$$

$$A(z) = \prod_{m=1}^{p} (z - z_m) = \sum_{k=0}^{p} a_k z^{p-k}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{p} a_k . s(n-k) = 0 \;,\; a_0 = 1 \;,\; n \geq p+1$$

Estimation des paramètres

❶Estimation AR➔pôles

$$\underline{\mathbf{a}}_{MC} = \left(\mathbf{X}^{\mathbf{H}}\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^{\mathbf{H}}\underline{\mathbf{x}} \text{ avec } \mathbf{X}^{\mathbf{H}} = \mathbf{X}^{\mathbf{t}*}$$

❷ Résolution de Vandermonde

$$\underline{\mathbf{B}}_{MC} = \left(\mathbf{V}^{\mathbf{H}}\mathbf{V}\right)^{-1} \mathbf{V}^{\mathbf{H}}\underline{\mathbf{x}}$$

➔ Amplitudes complexes

$$\begin{cases} \mathbf{V} = \left[\hat{z}_m^n\right] \text{ Vandermonde (Nxp)} \\ \underline{\mathbf{B}}_{MC} = \left|\hat{B}_1 \quad \ldots \quad \hat{B}_p\right|^t \end{cases}$$

Modèles Multi-impulsionnels

P Signaux d'entrée impulsionnels de paramètres $\{n_{i,m}\}$ $\{A_{i,m}\}$

$$B_m(n) = \sum_{i=1}^{L_m} A_{i,m} \cdot \partial\left(n - n_{i,m}\right) \qquad m = 1,\ldots,\ P$$

excitant P filtres générateurs (ARMA, Prony, …) de paramètres $\Theta_{S,m}$*et donc R.I.*

$$\{h_m(n), \Theta_{S,m}\} \qquad m = 1,\ldots,\ P$$

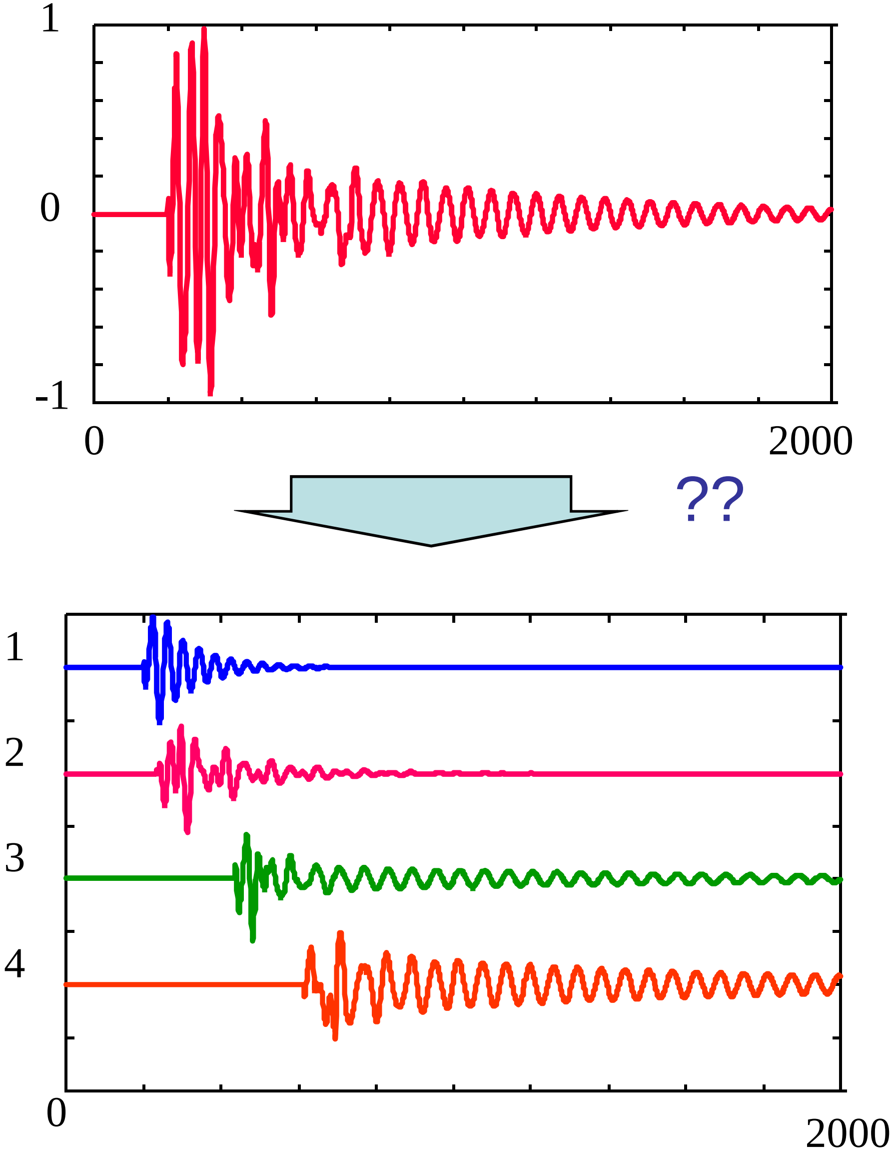
Modèle de signal multi-impulsionnel multi-modèles

$$\hat{x}(n) = \sum_{m=1}^{P} \sum_{i=1}^{L_m} A_{i,m} \cdot h_m\left(n - n_{i,m}\right)$$

Exemple de signaux électromagnétiques

$\hat{x}(n)$

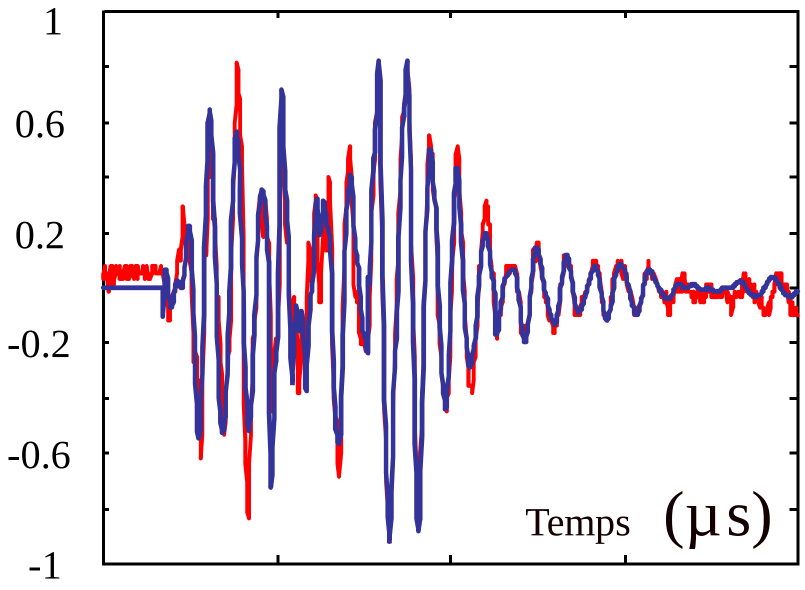
$P = 4$

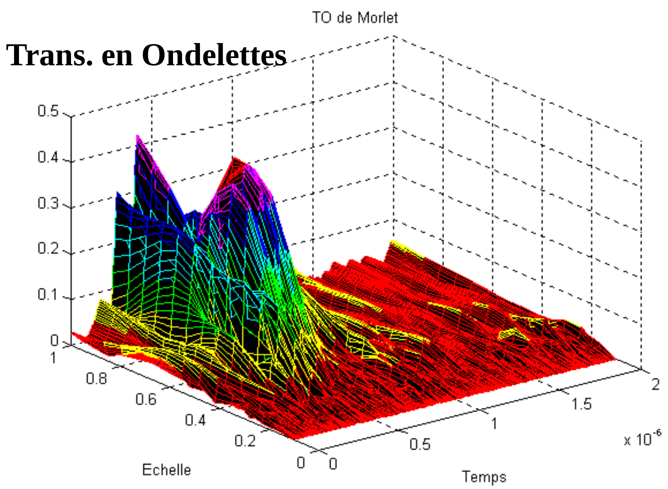


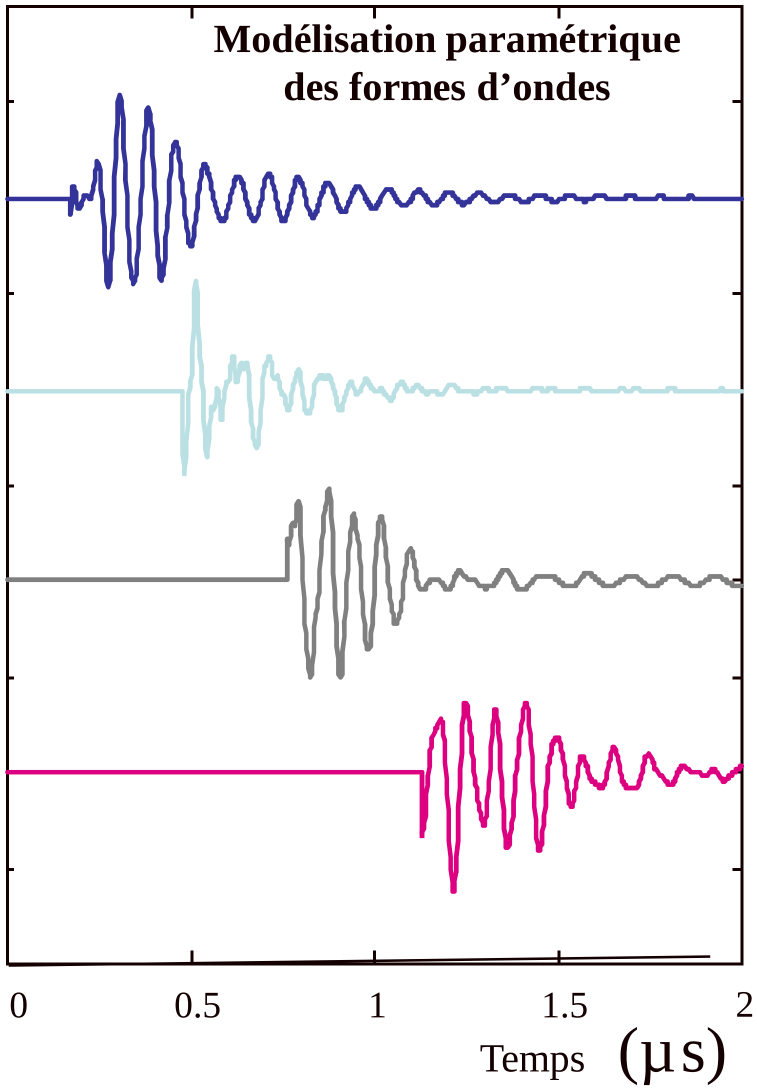
$\left\{h_m(n), \Theta_{S,m}\right\}$

$m = 1, \ldots, 4$

Modélisation Multi-Prony Multi-Date



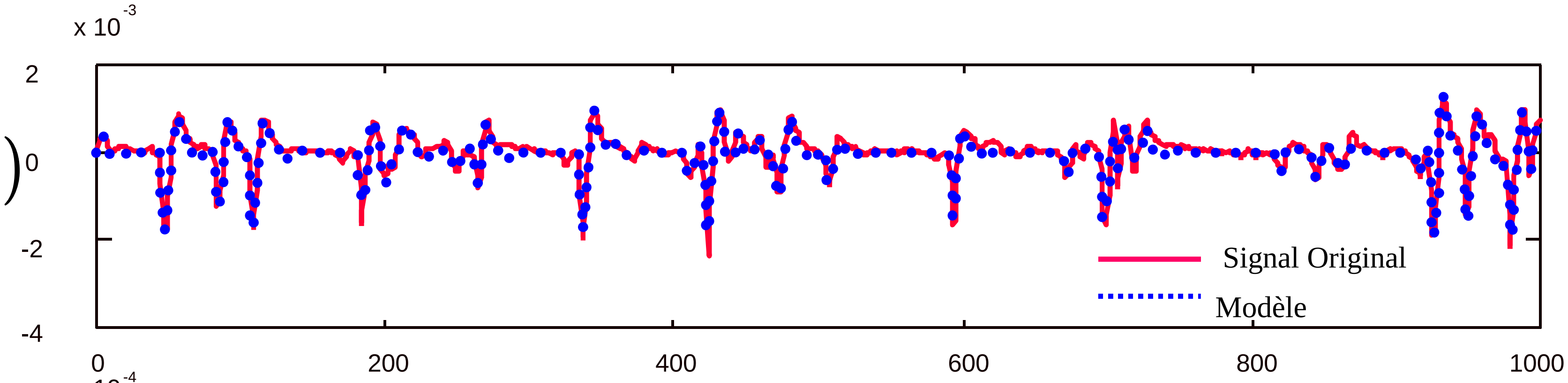




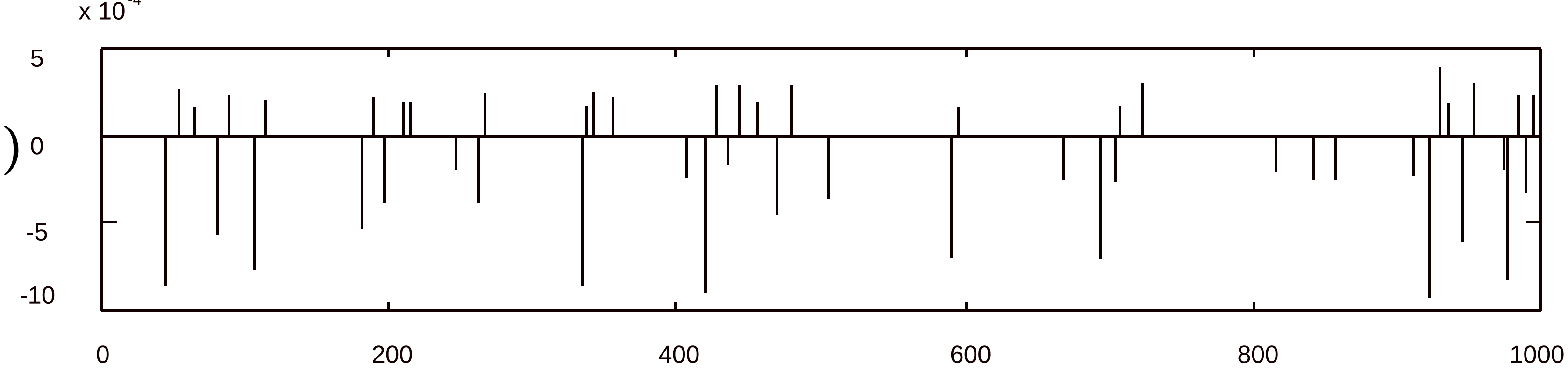
Exemple de signaux biomédicaux (EMG)

$\hat{x}(n)$

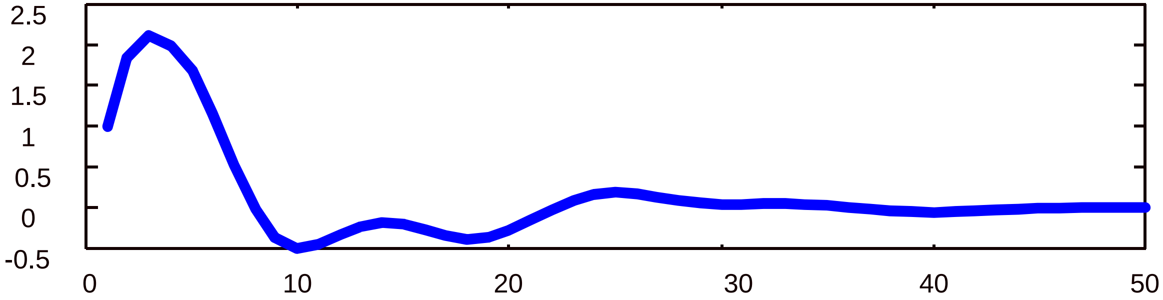
$P=1$



$B_1(n)$



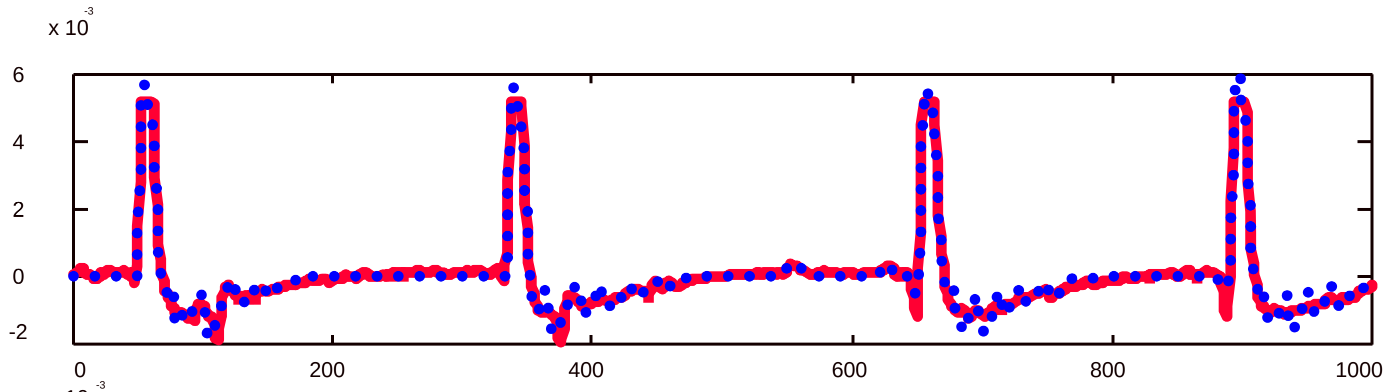
$\{h_1(n), \Theta_{S,1}\}$



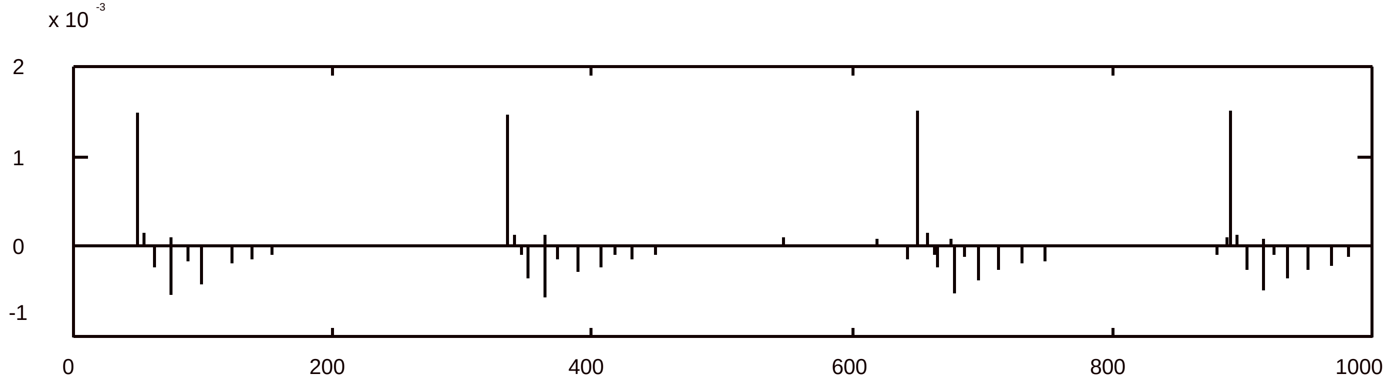
Exemple de signaux biomédicaux (EMG)

$\hat{x}(n)$

$P=1$

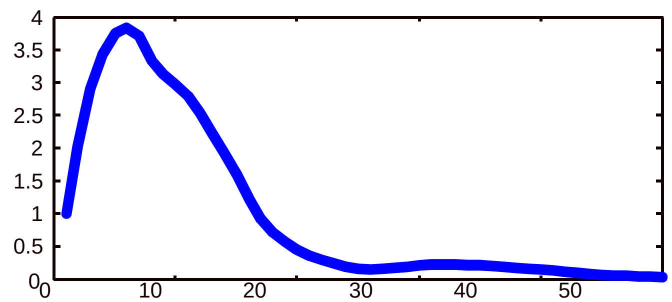


$B_1(n)$



$\{h_1(n), \Theta_{S,1}\}$

p-neuro 3c



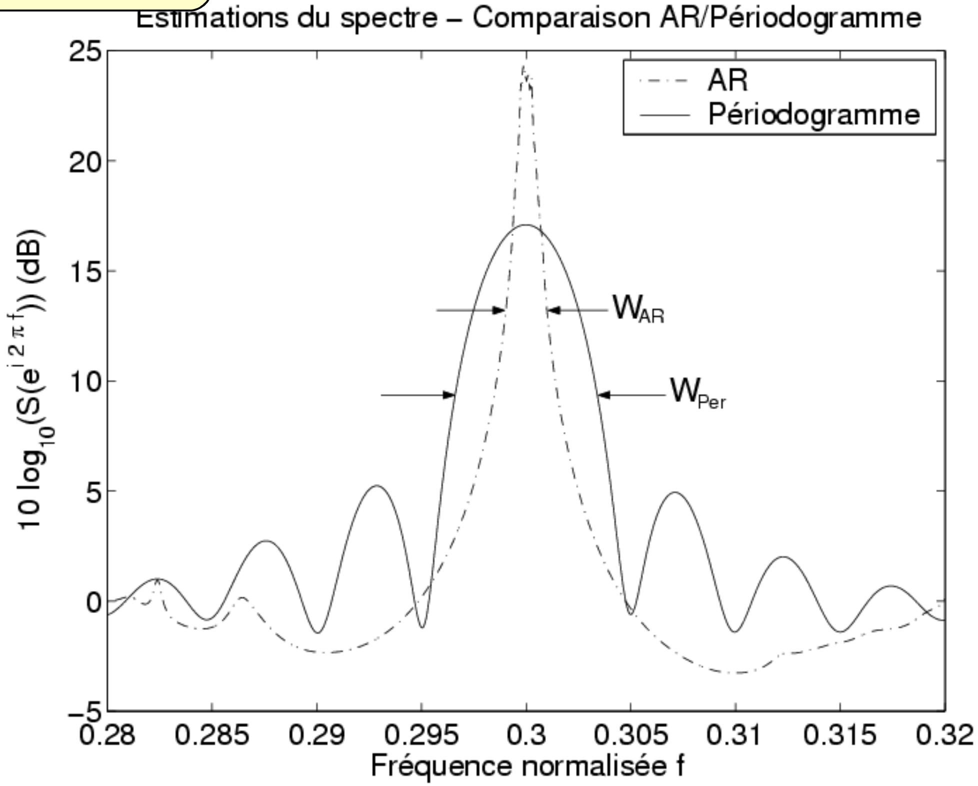
Comparaison AR - Périodogramme

Cas d'un sinus + bruit

Paramètres

N=200 échantillons, *100* réalisations

SNR=-2dB *p=60*



$$W_{Per} \simeq \frac{2\sqrt{6-3\sqrt{2}}}{\pi N}$$

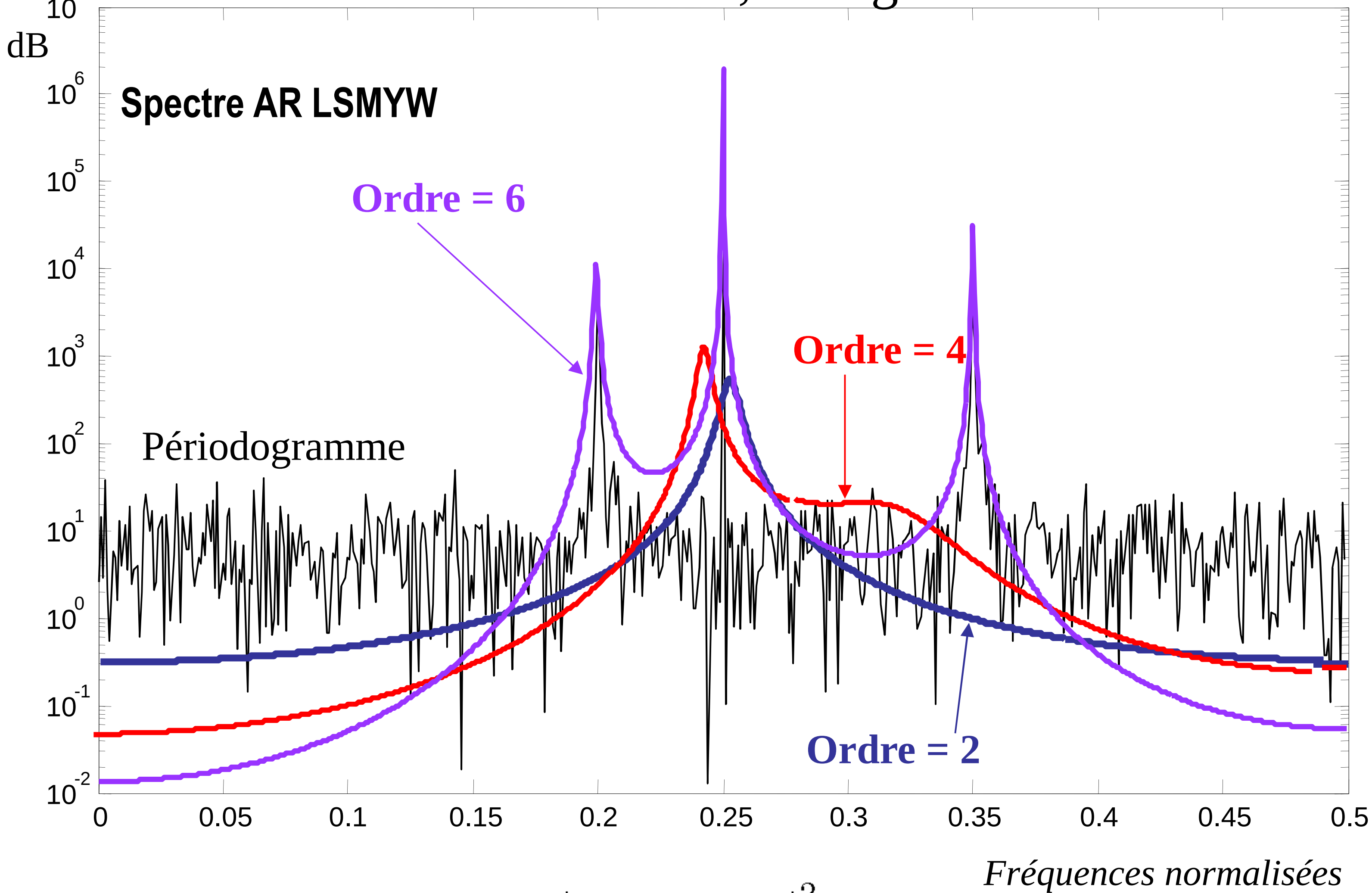
$$W_{AR} \simeq \frac{6}{\pi p(p+1)\gamma}$$

N : nombre de points de signal

γ: rapport signal à bruit

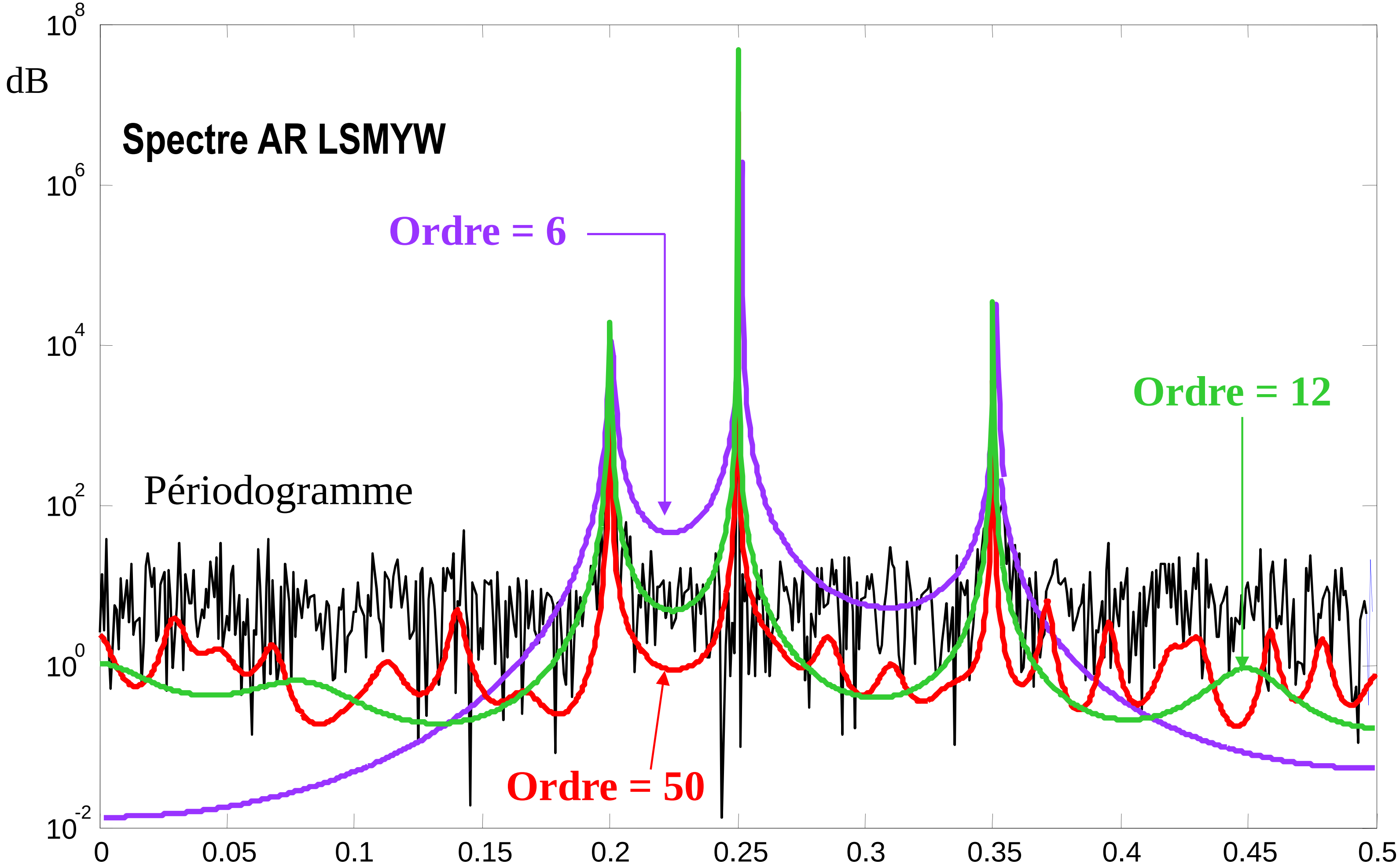
p : ordre du modèle (~ *N*/3 au maximum)

3 sinus et du bruit, un signal d’école…



$$S_{ARMA}(f) = \sigma_e^2 \frac{\left| \sum_{k=0}^{q} b_k e^{i2\pi f k} \right|^2}{\left| 1 + \sum_{k=1}^{p} a_k e^{i2\pi f k} \right|^2}$$

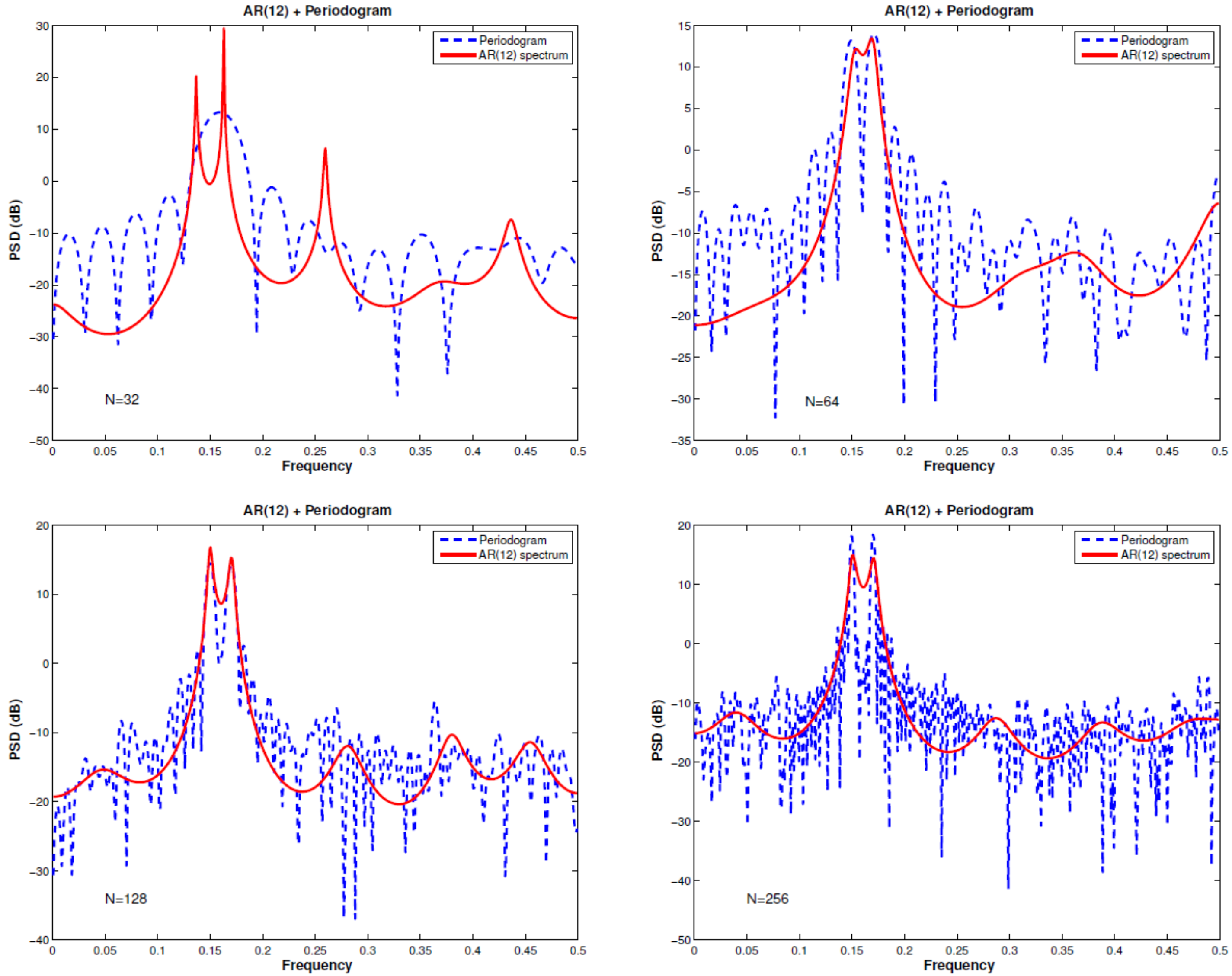
… et si on augmente encore l'ordre ?



Fréquences normalisées

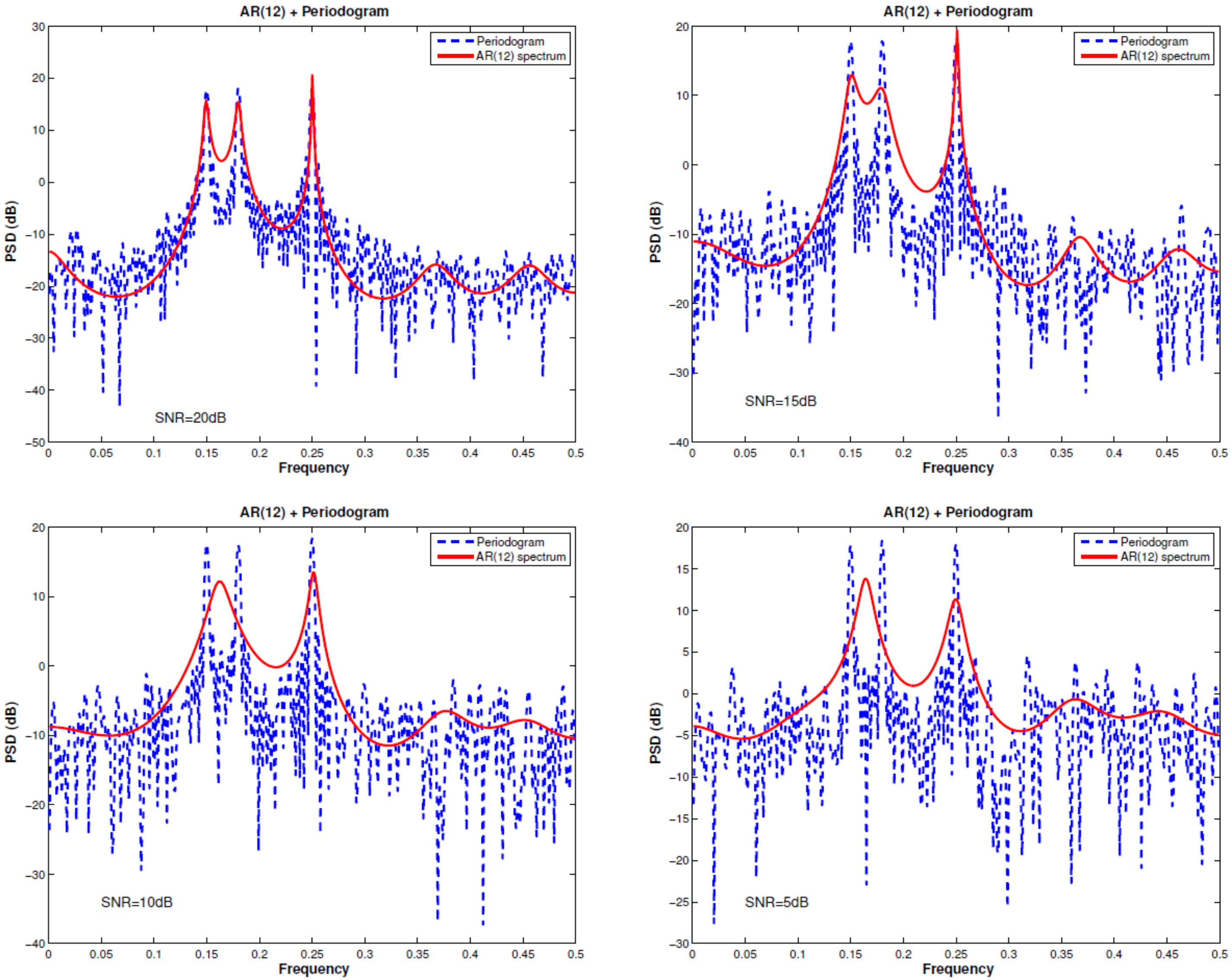
Comparaison AR-Périodogramme

- Influence du nombre d'échantillons *N*

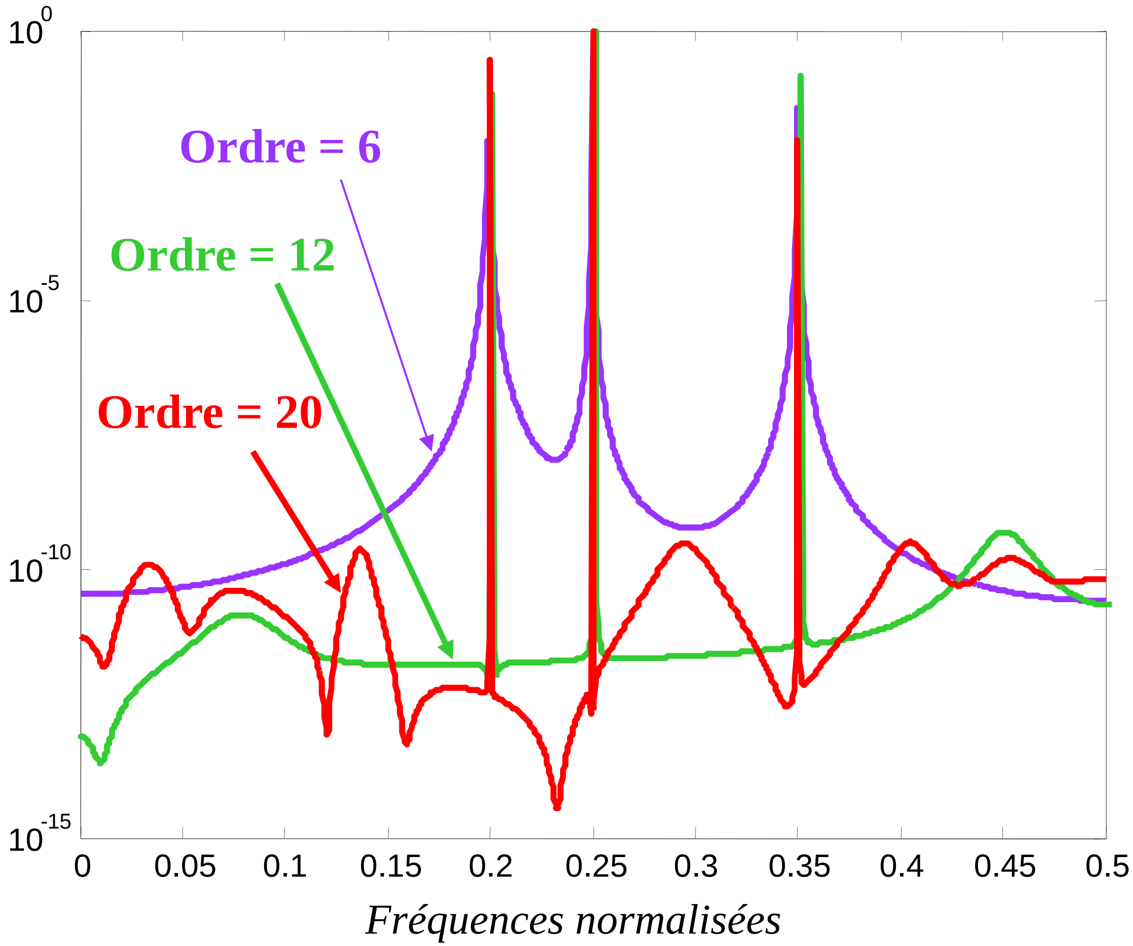


Comparaison AR-Périodogramme

- Influence du *SNR*



Spectres du modèle de Prony



$$R_X(k)=\sum_{m=1}^{p} b_m z_m^k + e(k), k \ge 0 \quad \Rightarrow \quad S_{\text{Prony}}(f) = \sum_{m=1}^{p} b_m \frac{1-Z_m^2}{(1-Z_m z^{-1})(1-Z_m z)}\bigg|_{z=e^{i2\pi f}}$$

$$R_X(k) = R_X{}^*(-k)$$

Exemple d'émetteur de base

$\{b_k\}_{k\in Z}$ *Information binaire*

Filtre de mise en forme : h(t)

filtrage

Signal

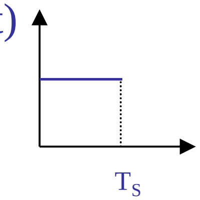
$$x(t) = \sum_k b_k h(t-kT_s) = b(t)*h(t)$$

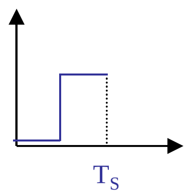
$$\text{avec } b(t) = \sum_k b_k \delta(t-kTs)$$

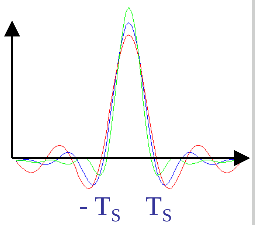
$b_k \rightarrow b_k\, h(t)$

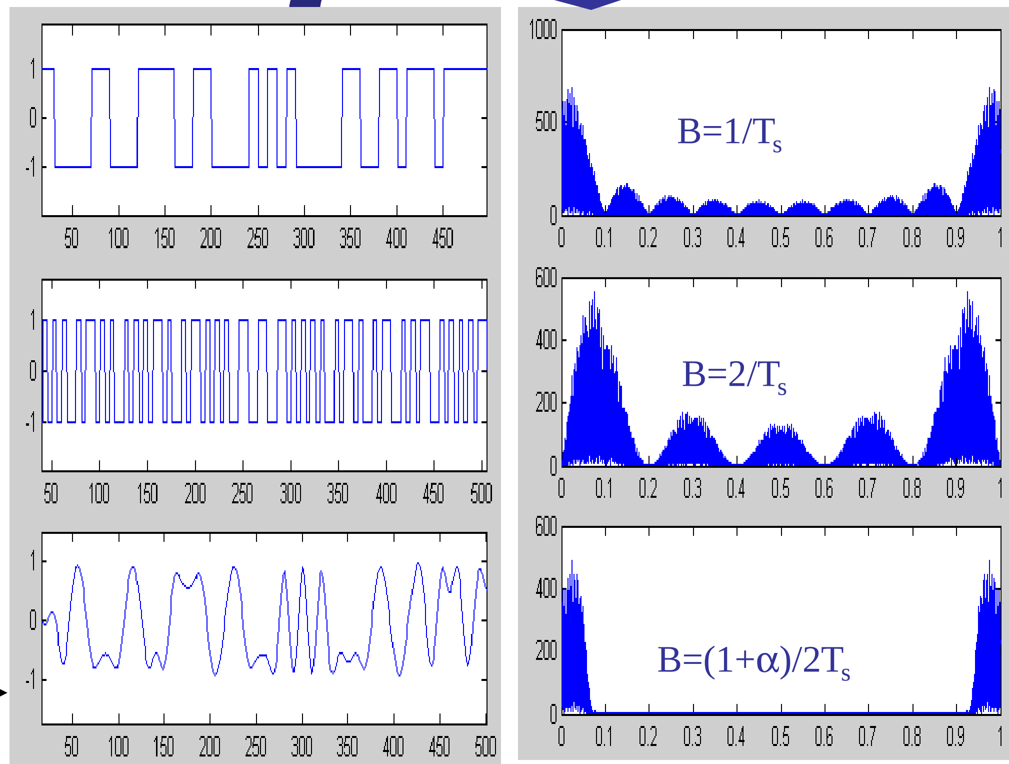
Bits *Symbole*

analyse spectrale









Exemples de mises en forme : NRZ, Biphase, RCF

Exemple d'égalisation fixe

- « MMSE » : Minimum Mean Square Error

$$\text{Min}\{\ E[e^2(n)]\ \} \longrightarrow \underline{C_{opt}} = [R_{xx}]^{-1}.\underline{R_{bx}}$$

- Canal sélectif + perturbation sinusoïdale

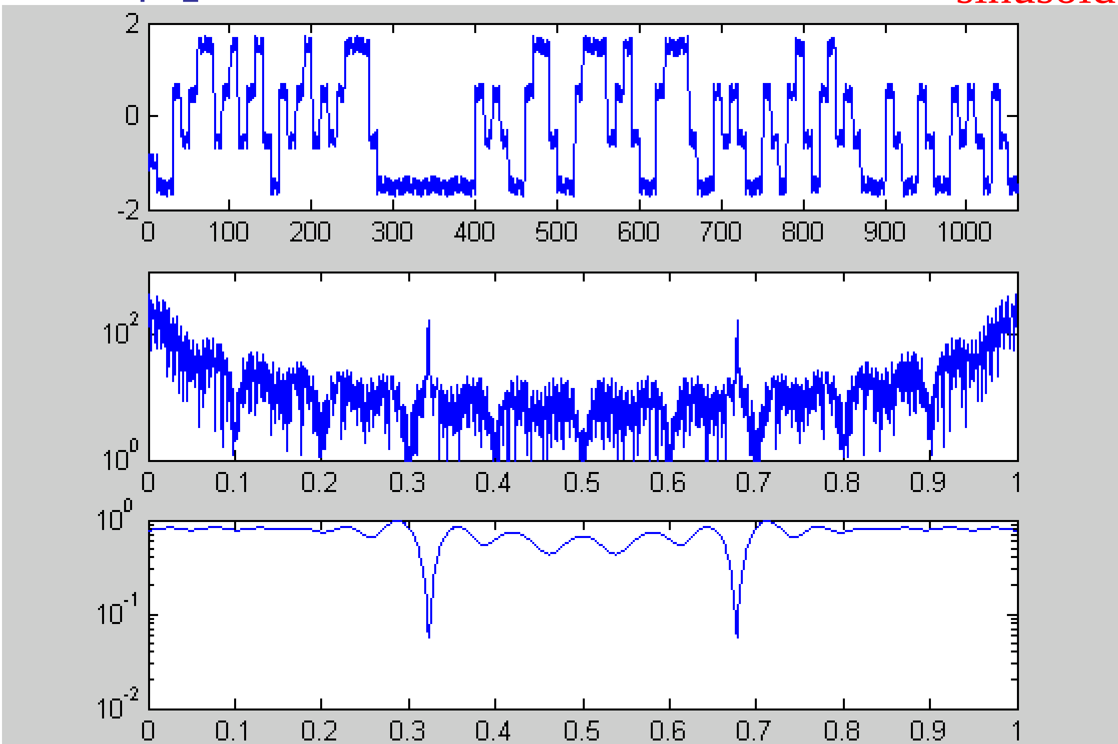
$$s(t) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i\, e(t-\tau_i) = 1.\ e(t) + 0.5\ e(t-T_S) + n(t)$$

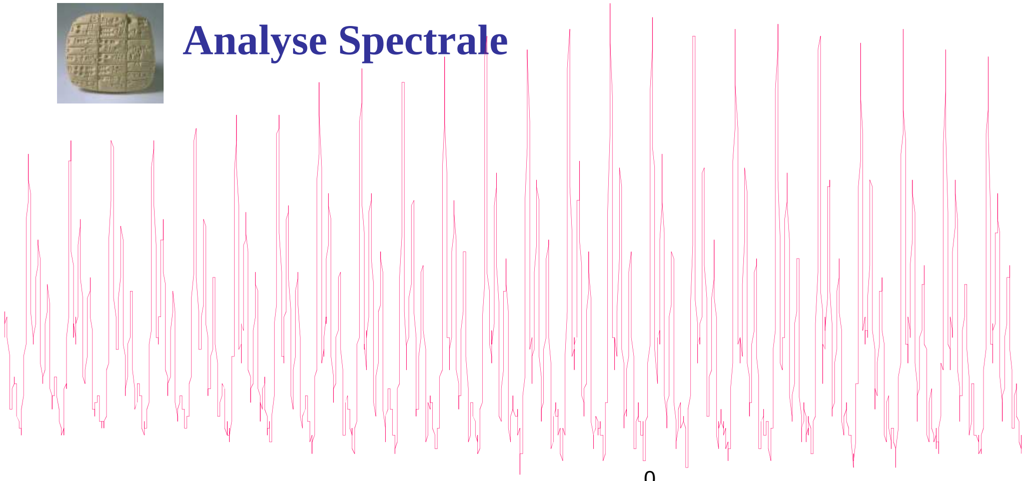
sinusoïdal ($\tilde{f} = 1/3.1$)

s(t)

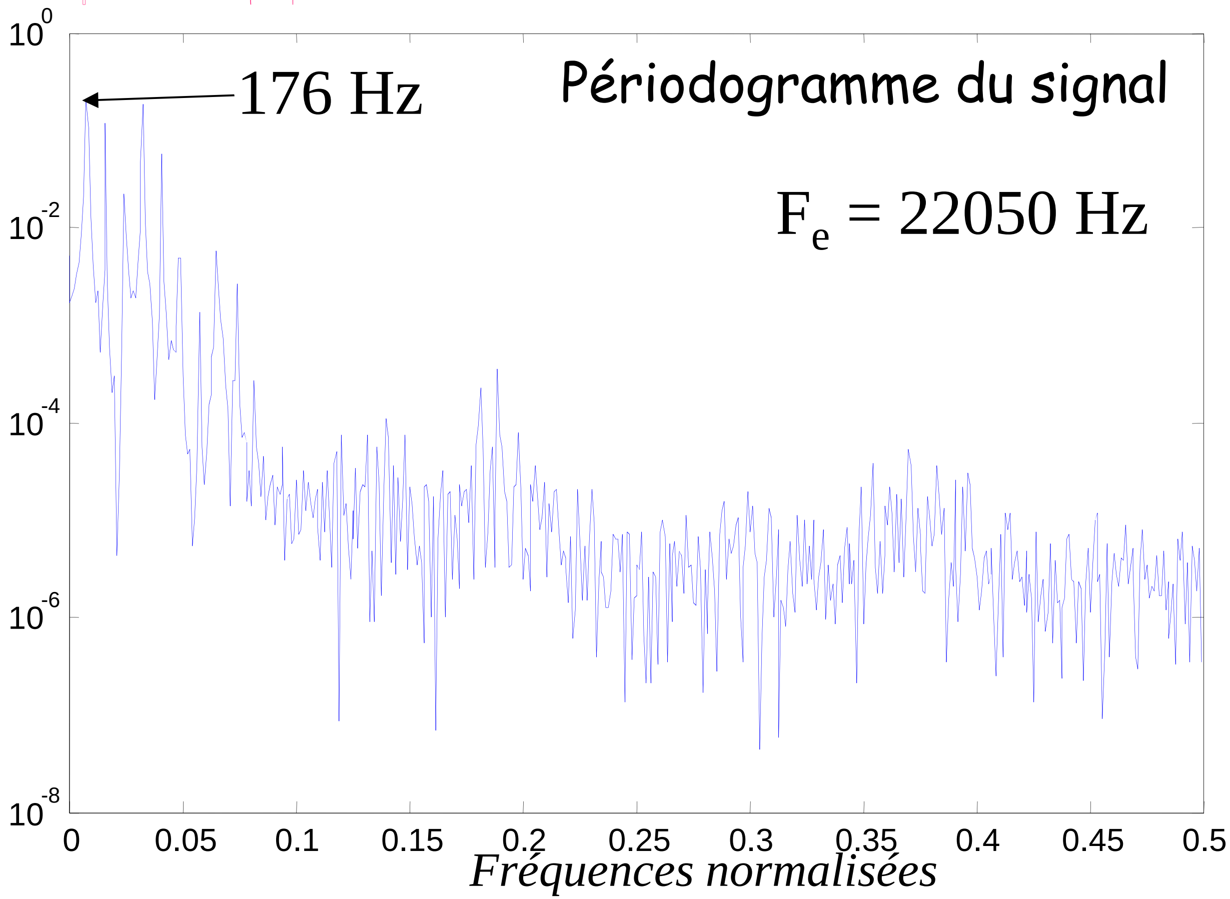
S(f)

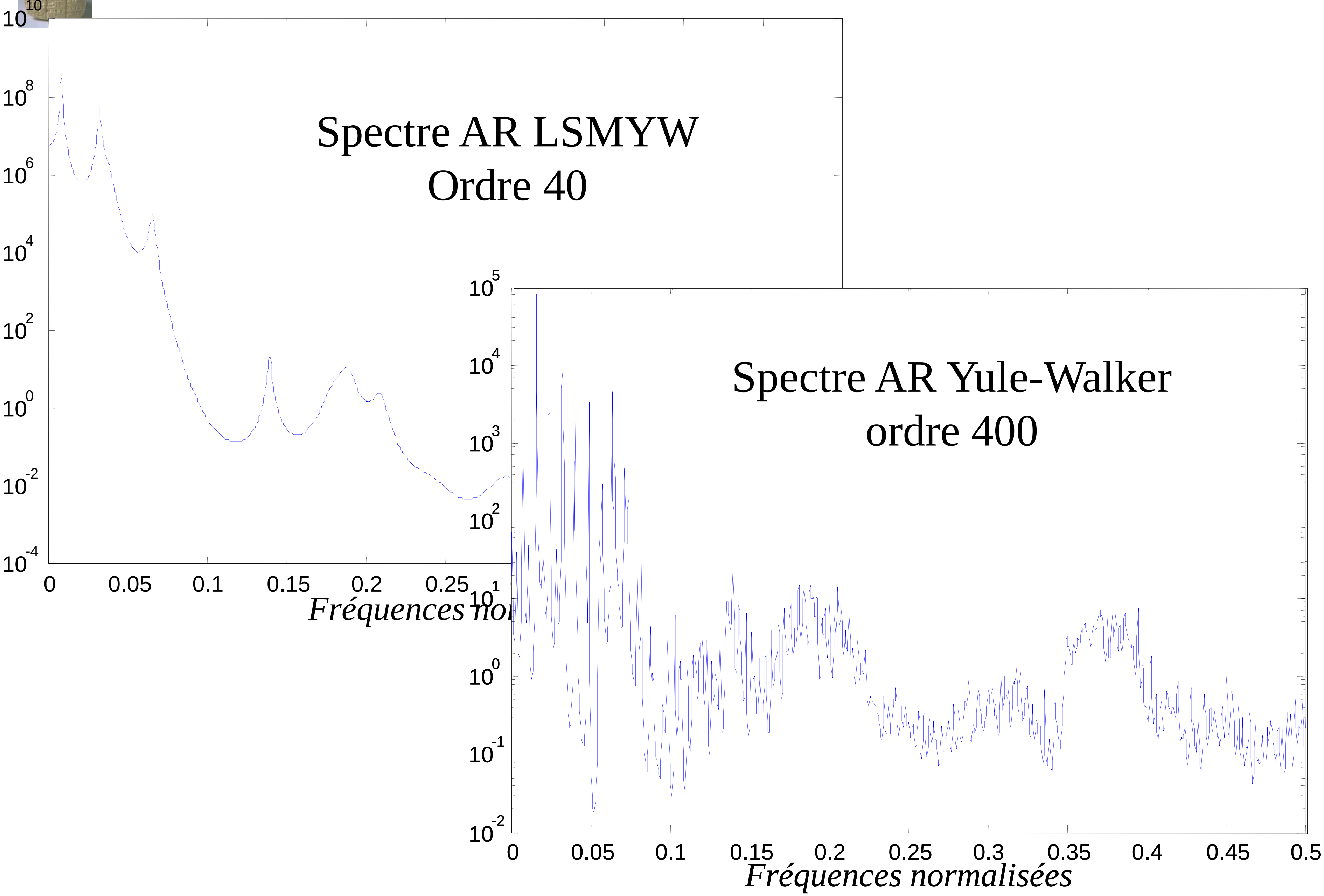
C_{opt} (f)



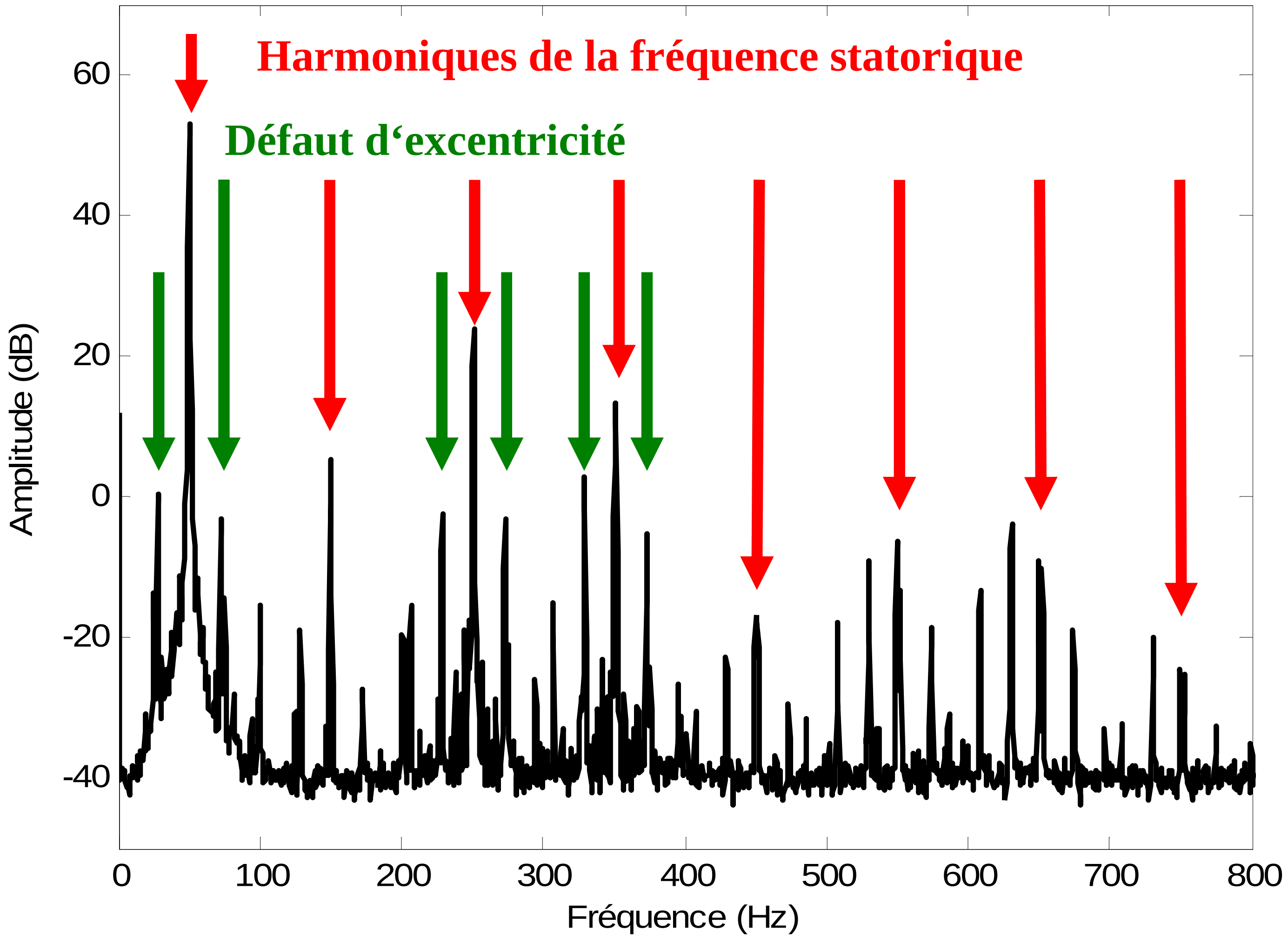


aaaaa…


176 Hz
Périodogramme du signal
F_e = 22050 Hz
10^0
10^-2
10^-4
10^-6
10^-8
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
0.3
0.35
0.4
0.45
0.5
Fréquences normalisées


Spectre AR LSMYW
Ordre 40
Spectre AR Yule-Walker
ordre 400
Fréquences normalisées
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
0.3
0.35
0.4
0.45
0.5

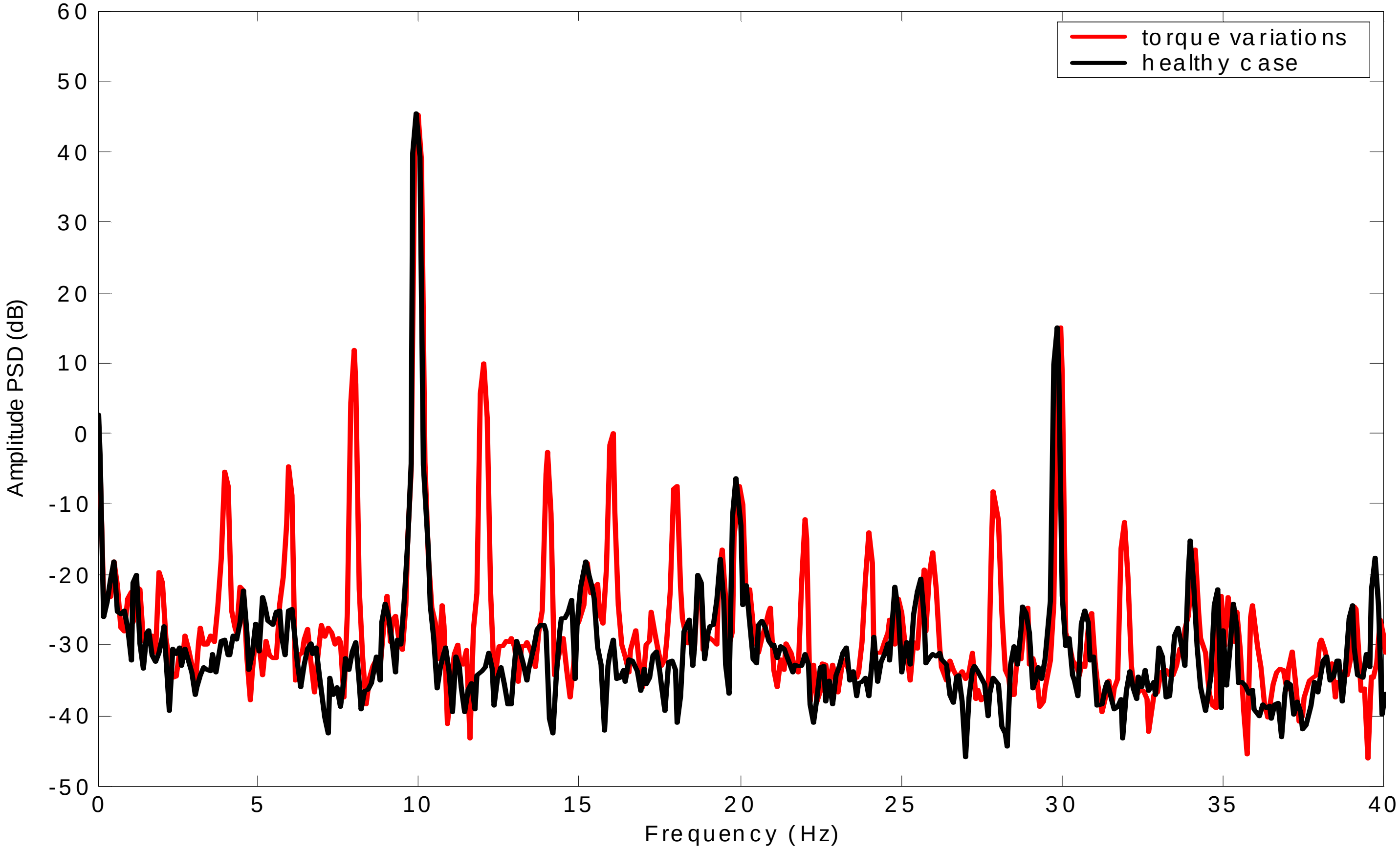
Analyse spectrale du courant statorique



Ali ABDALLAH, Martin BLÖDT, Sylvain CANAT, Bruno DAGUES, Jean FAUCHER
CODIASE/TIMSuD

MAS - Essai avec et sans variations de couple courant statorique

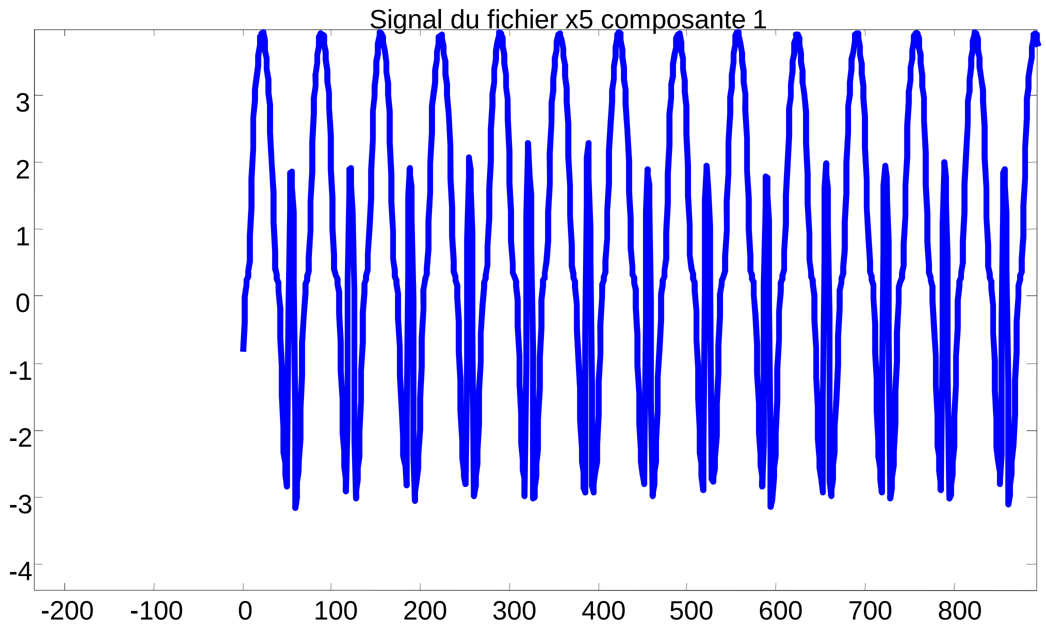
Densité spectrale de puissance avec périodogramme moyenné



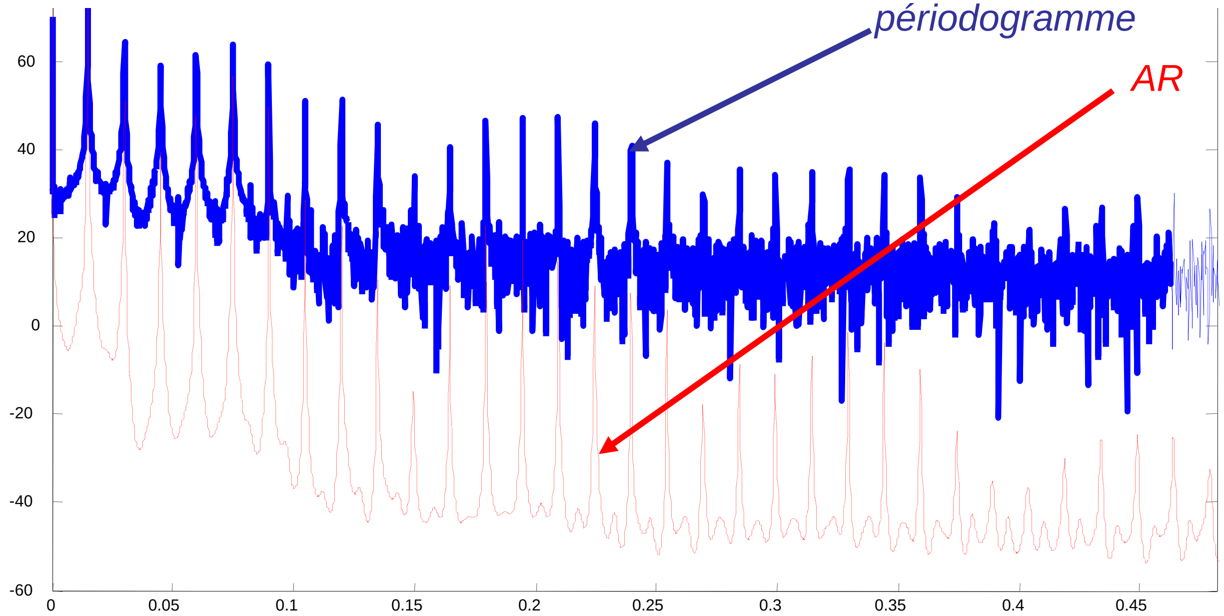
Ali ABDALLAH, Martin BLÖDT, Sylvain CANAT, Bruno DAGUES, Jean FAUCHER
CODIASE/TIMSuD

Alternateur 60 KW Signal de flux : Essai sans court-circuit

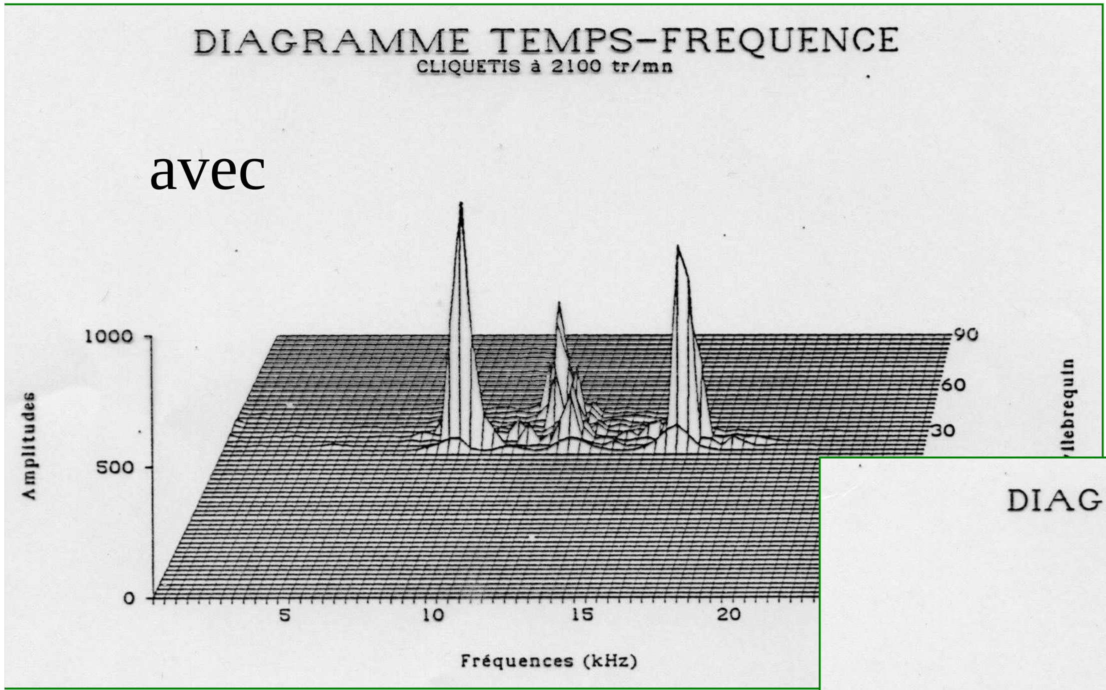
Signal

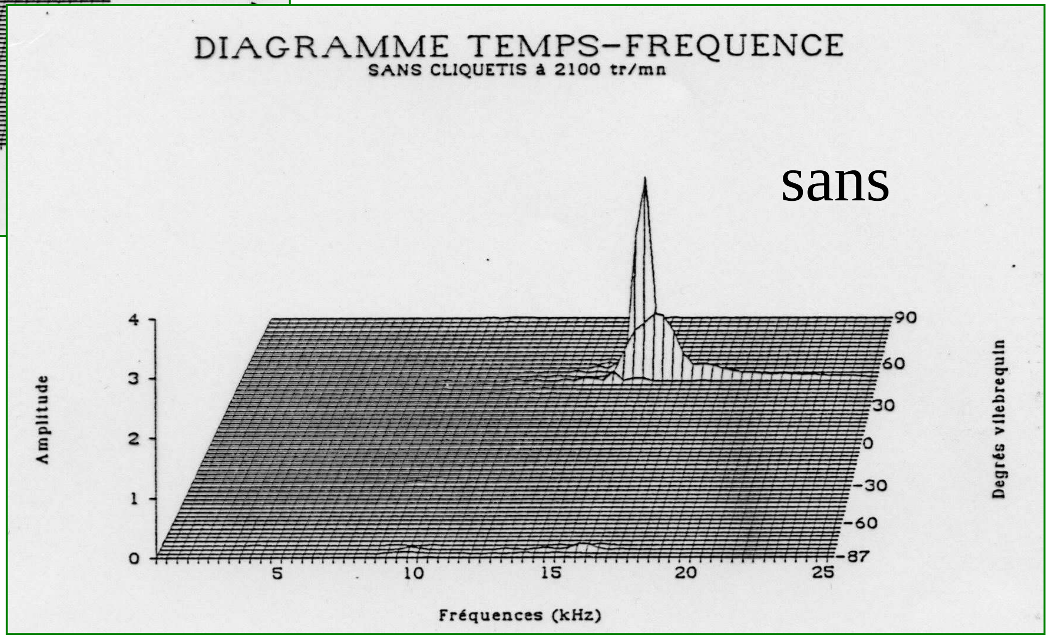


Spectre (DSP) 'de raies'

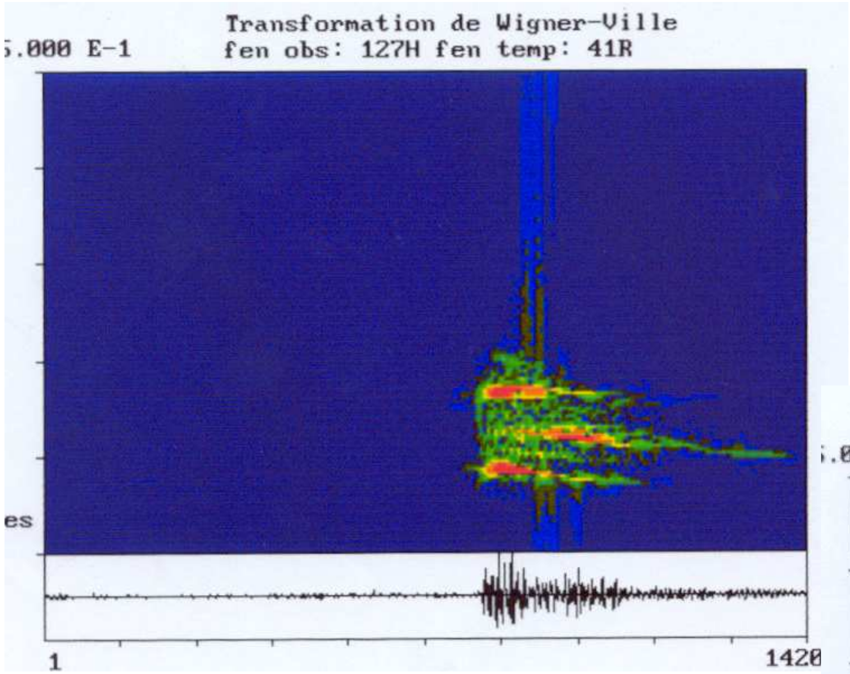


Reconnaissance en TF:
Analyse Wigner de cliquetis

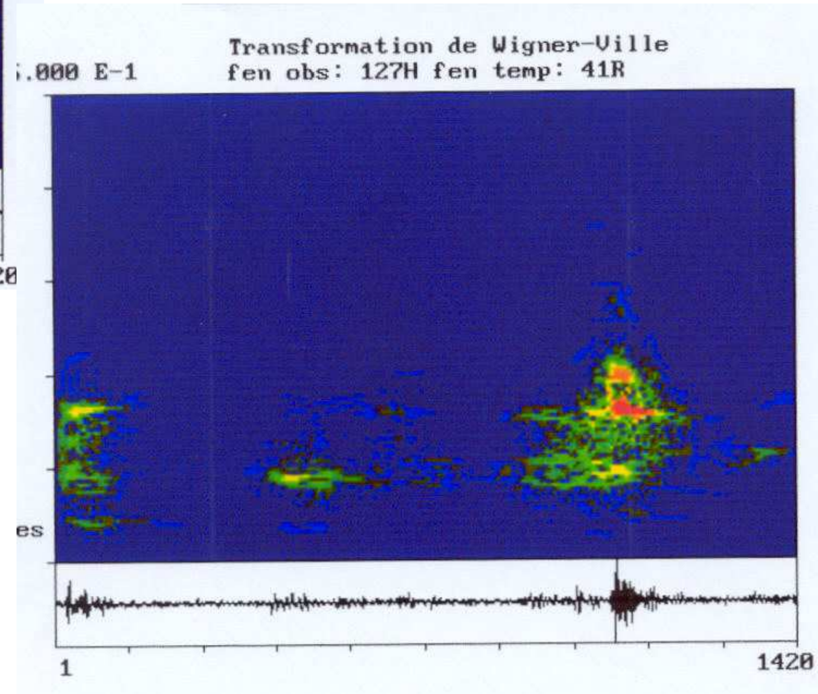




Reconnaissance en TF: Analyse Wigner de cliquetis

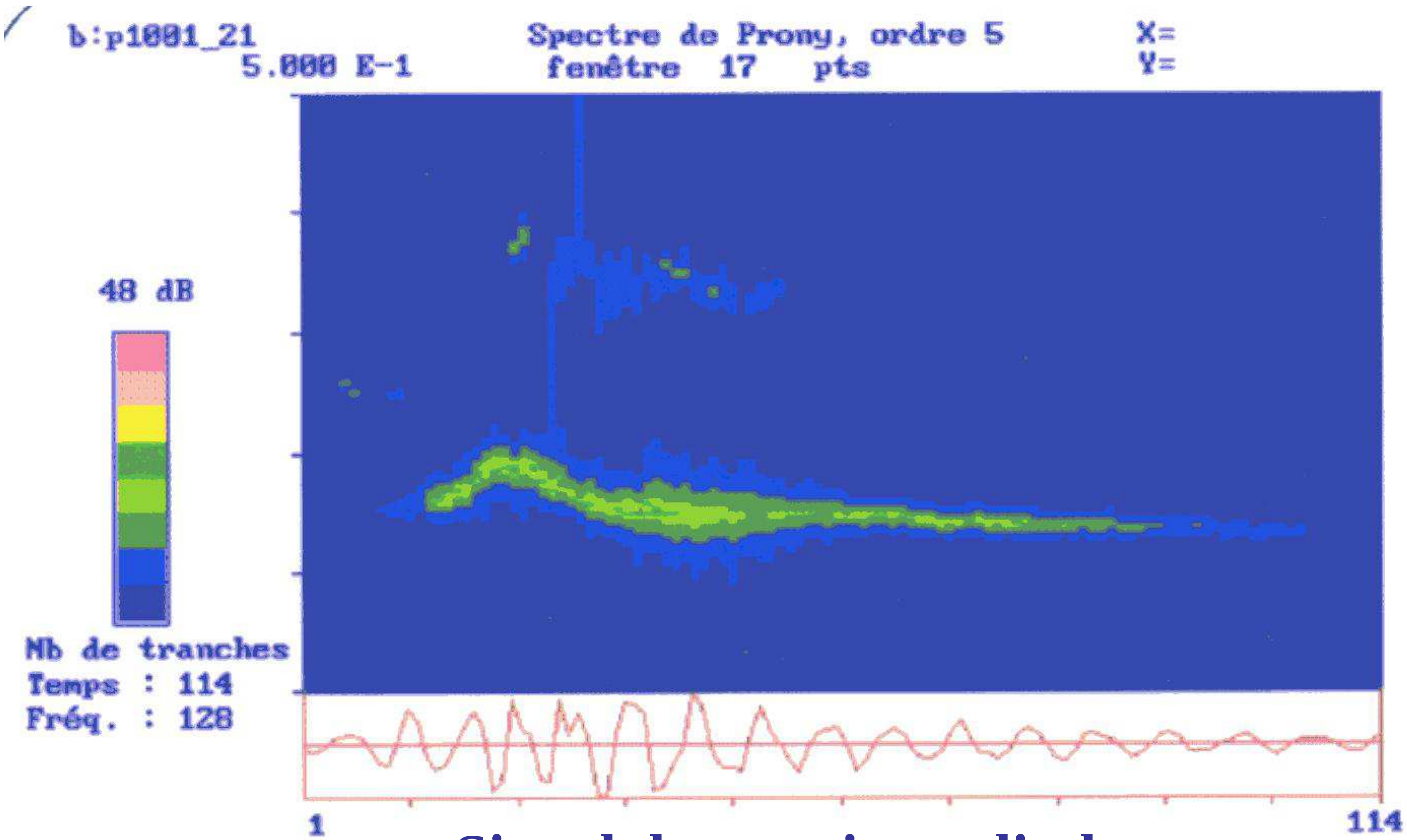


avec



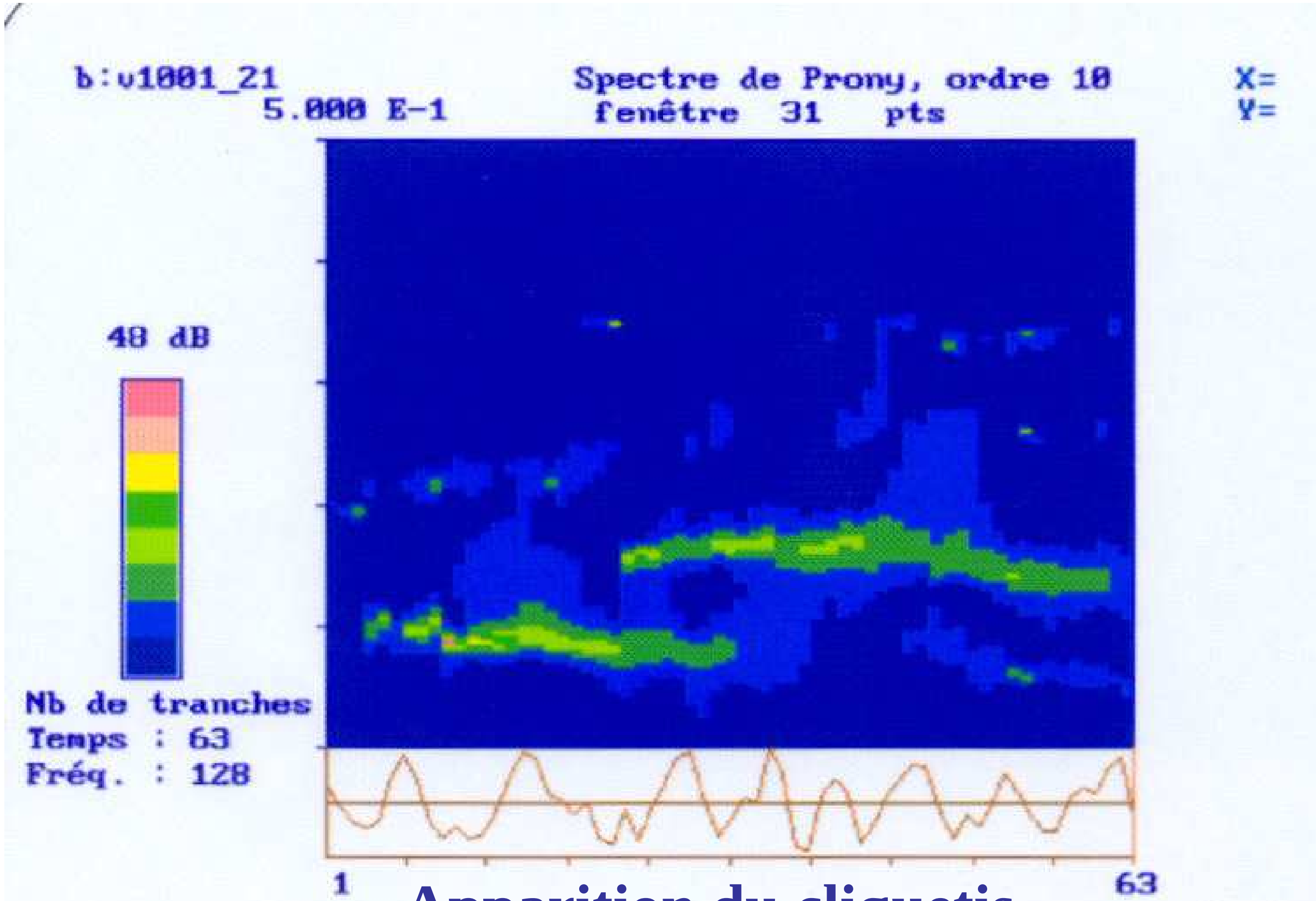
sans

Modèles paramétriques évolutifs



Signal de pression cylindre

Modèles paramétriques évolutifs



Apparition du cliquetis