

Intérêt du découpage en sous-bandes pour l'analyse spectrale

David BONACCI

Institut National Polytechnique de Toulouse (INP)

École Nationale Supérieure d'Électrotechnique, d'Électronique,
d'Informatique, d'Hydraulique et des Télécommunications (ENSEEIH)

Laboratoire Télécommunications Spatiales et Aéronautiques (TéSA)

Objectifs de la thèse

- ✓ **Objectif 1: Présenter les divers avantages ou inconvénients de l'analyse spectrale paramétrique dans les sous-bandes.**
- ✓ **Objectif 2: Présenter des méthodes originales destinées à éliminer ces inconvénients.**
 - Recouvrement spectral.
 - Diminution du nombre d'échantillons par décimation.
- ✓ **Focalisation sur des méthodes d'analyse spectrale paramétriques.**

Plan de la présentation

- ✓ **Présentation**
 - Analyse spectrale paramétrique.
 - Découpage en sous-bandes.

- ✓ **Intérêt du découpage en sous-bandes pour l'analyse spectrale et les problèmes rencontrés.**

- ✓ **Travaux originaux**
 - Élimination des problèmes dus au recouvrement spectral.
 - Utilisation des intercorrélations entre les sous-signaux issus de la décimation.

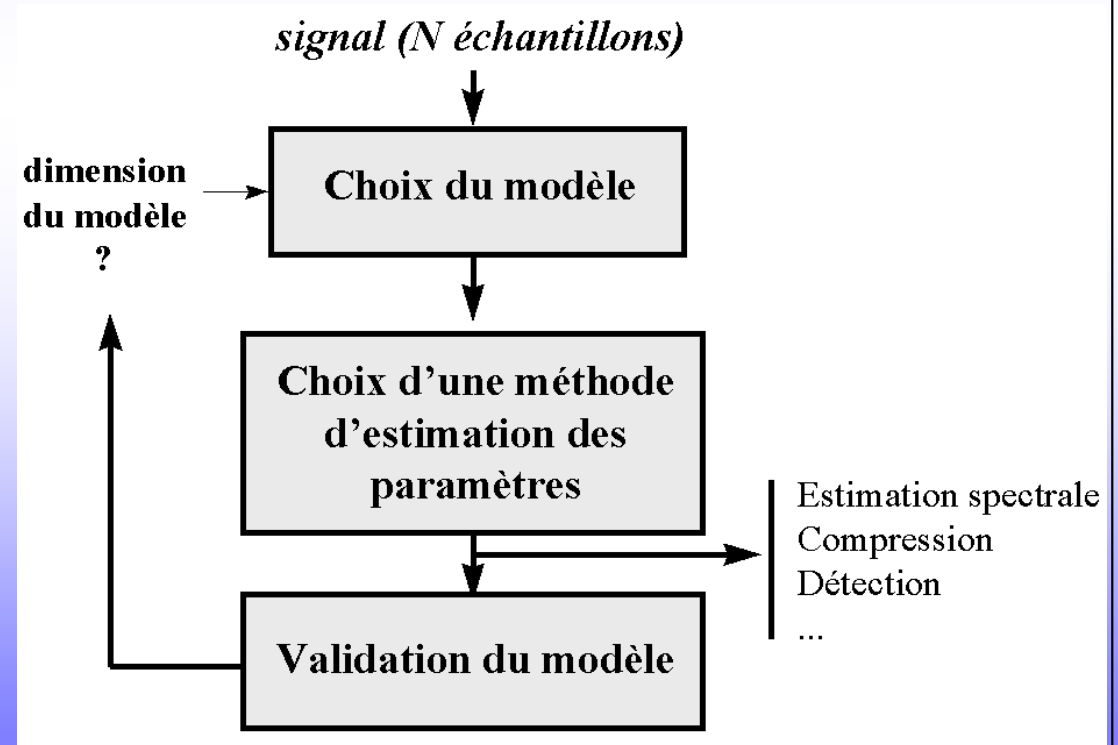
- ✓ **Conclusions et perspectives.**

Analyse spectrale paramétrique

- Principe -

- ✓ Basée sur la connaissance a priori d 'un modèle mathématique du signal à analyser. Nécessite le choix d 'un modèle et de sa dimension.

- ✓ On estime les *paramètres* de ce modèle (Fourier estime directement le spectre à partir des échantillons).



Analyse spectrale paramétrique - Modèle AR -

- ✓ **Modèle « tous pôles » qui s 'écrit à l 'ordre p:**

$$u(n) = \sum_{k=1}^p a_k u(n - k) + w(n)$$

- ✓ **Spectre du modèle AR**

$$S_{AR}(f) = \frac{\sigma_w^2}{\left| 1 + \sum_{k=1}^p a_k e^{i2\pi f k} \right|^2}$$

- ✓ **Interprétation physique possible sous la forme du filtrage linéaire invariant d 'un bruit blanc**

Analyse spectrale paramétrique

- Autres modèles paramétriques -

- ✓ **Modèle de Prony**
$$u(n) = \sum_{k=1}^p A_k e^{\alpha_k n + j(2\pi f_k n + \phi_k)} + w(n)$$
 - Adapté à des sinusoides amorties (extension possible à la modélisation de signaux non stationnaires).
 - Horizon temporel de prédiction relativement réduit.

- ✓ **Méthode du maximum de vraisemblance**
 - Méthode statistique. Basée sur la minimisation d'un critère (forme quadratique).

- ✓ **Méthodes haute-résolution**
 - SVD, MUSIC, Esprit, ...
 - sous-espaces signal et bruit.

Analyse spectrale paramétrique

- Intérêt -

- ✓ **Extension de la connaissance du signal en dehors de la fenêtre temporelle d'observation \Rightarrow augmentation de la résolution fréquentielle.**

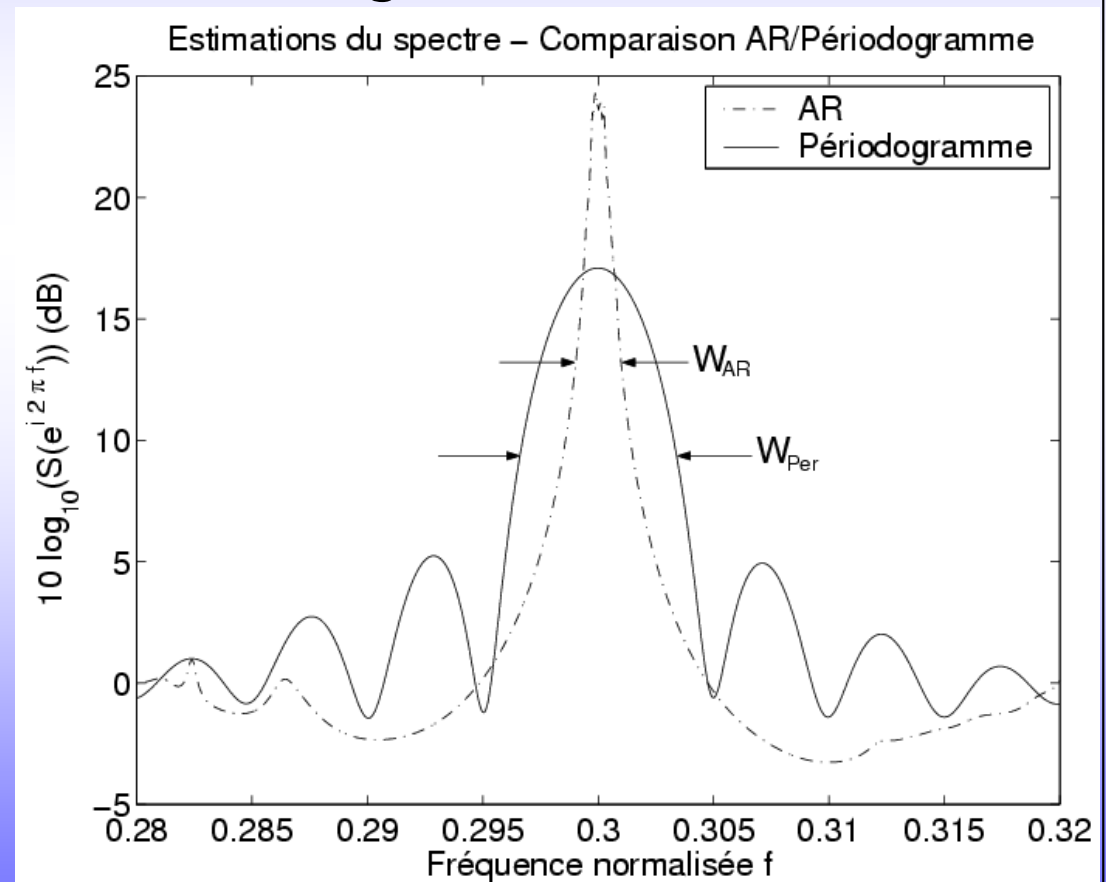
Paramètres

$N=200$ échantillons 100 réalisations

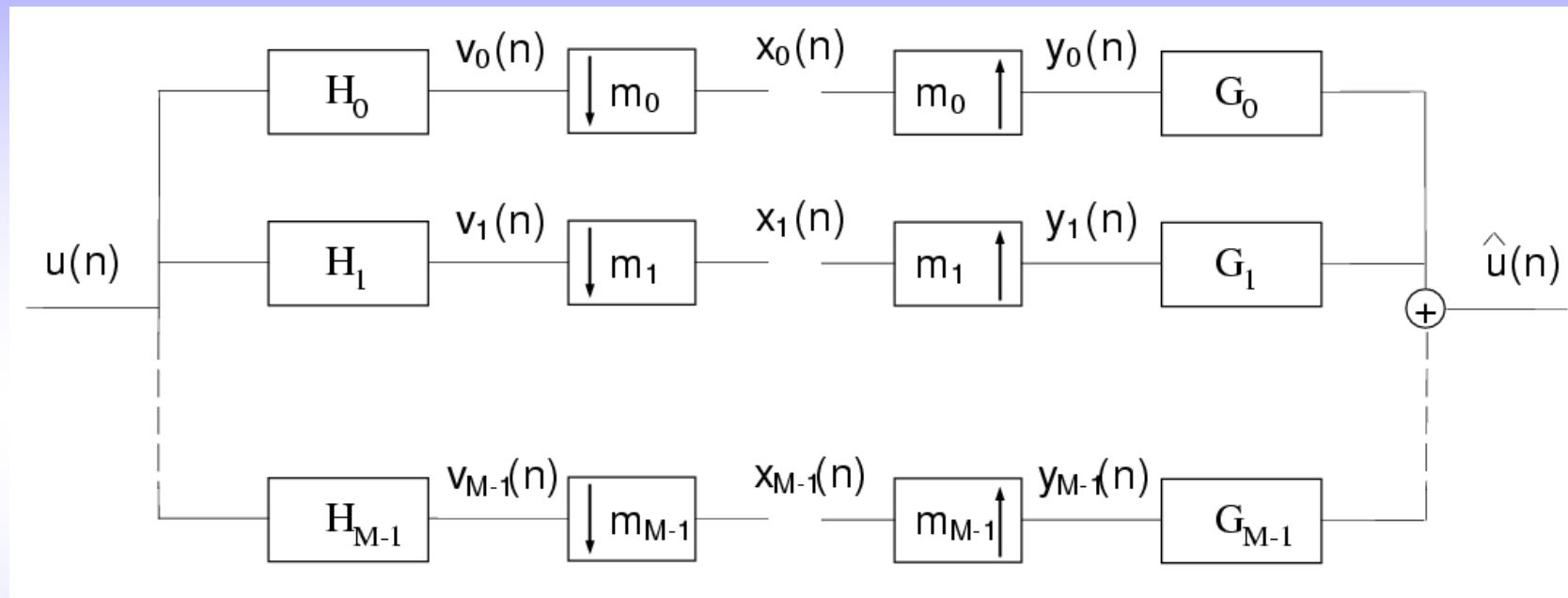
$SNR=-2dB$ $p=60$

$$W_{Per} \simeq \frac{2\sqrt{6 - 3\sqrt{2}}}{\pi N}$$

$$W_{AR} \simeq \frac{6}{\pi p(p+1)\gamma}$$



Découpage en sous-bandes



décimation : $x_j(n) = v_j(m_j n)$

interpolation : $y_j(n) = \begin{cases} x_j(n / m_j) & \text{si } n \text{ est multiple de } m_j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Découpage en sous-bandes

✓ Définitions

si $m_j = M, \forall j \Rightarrow$ banc de filtres uniforme

si $\forall j$, le filtre H_j est un passe bande idéal \Rightarrow banc de filtres idéal

si $\sum_{j=0}^{M-1} \frac{1}{m_j} = 1 \Rightarrow$ banc de filtres maximalement décimé

si $\sum_{j=0}^{M-1} \frac{1}{m_j} < 1 \Rightarrow$ banc de filtres sur - décimé

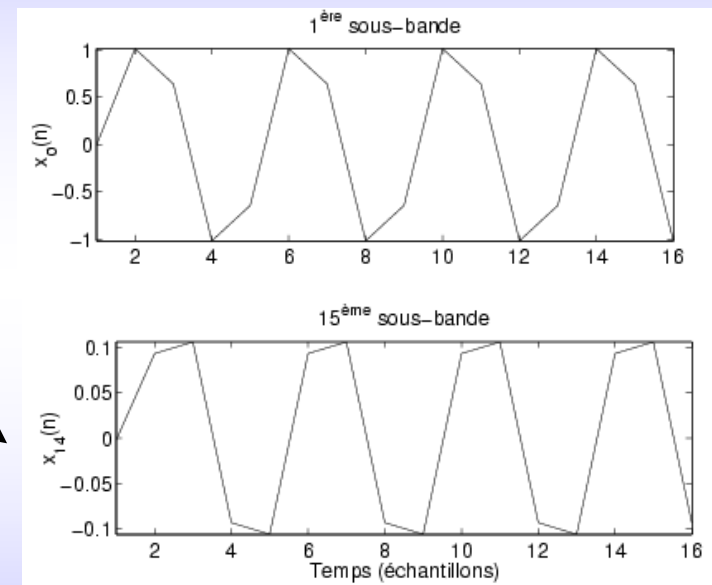
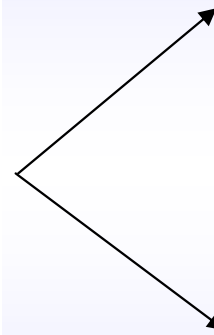
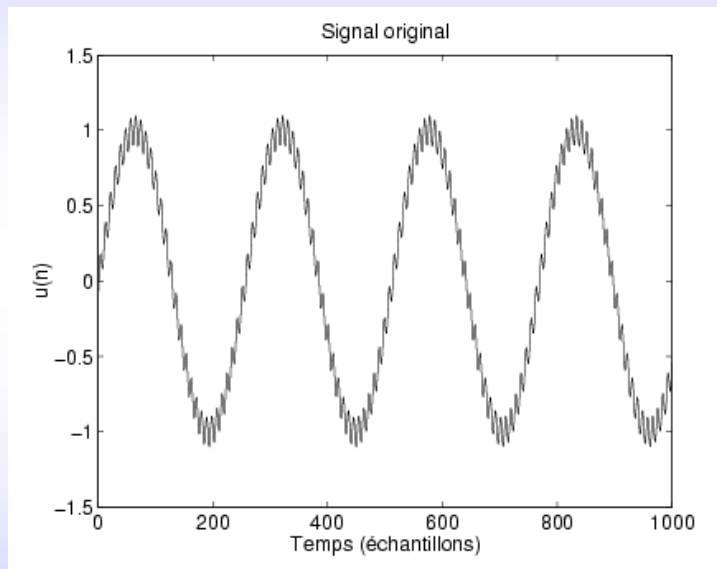
si $\sum_{j=0}^{M-1} \frac{1}{m_j} > 1 \Rightarrow$ banc de filtres sous - décimé

- Bancs de filtres maximalement décimés.
- Bancs uniformes ou non.
- Bancs idéaux ou non.

Découpage en sous-bandes

✓ Approche Physique

- Permet de décomposer le signal à analyser et de l'observer à plusieurs échelles différentes.



- Outil d'unification théorique dans de nombreux domaines:

Filtrage par blocs

Échantillonnage non uniforme

Systemes LPTV

Transformée en ondelettes, ...

Plan de la présentation

- ✓ **Présentation**
 - Analyse spectrale paramétrique.
 - Découpage en sous-bandes.

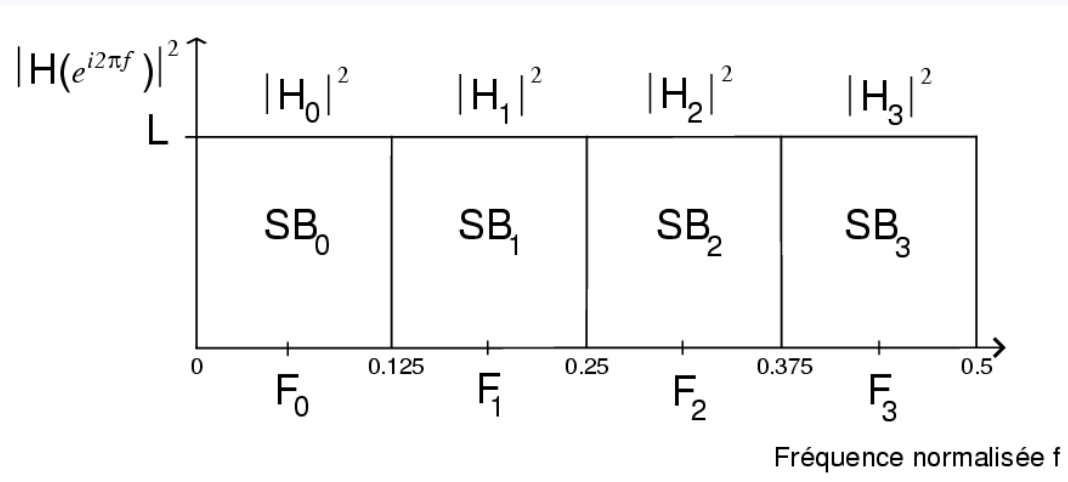
- ✓ **Intérêt du découpage en sous-bandes pour l'analyse spectrale et les problèmes rencontrés.**
 - Avantages liés à l'ordre des modèles
 - Avantages liés au filtrage et à la décimation
 - Inconvénients

- ✓ **Travaux originaux**
 - Élimination des problèmes dus au recouvrement spectral.
 - Utilisation des intercorrélations entre les sous-signaux issus de la décimation.

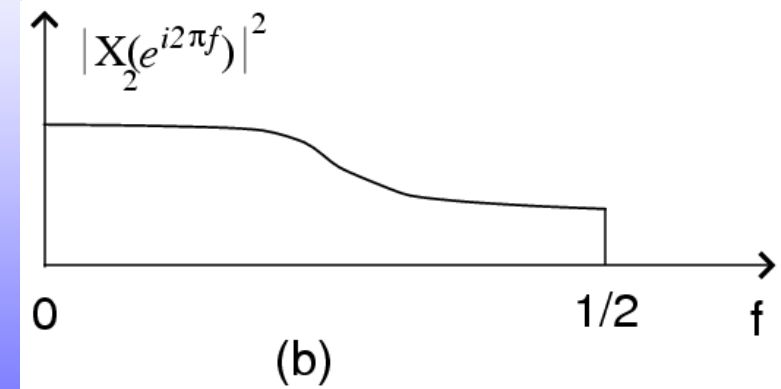
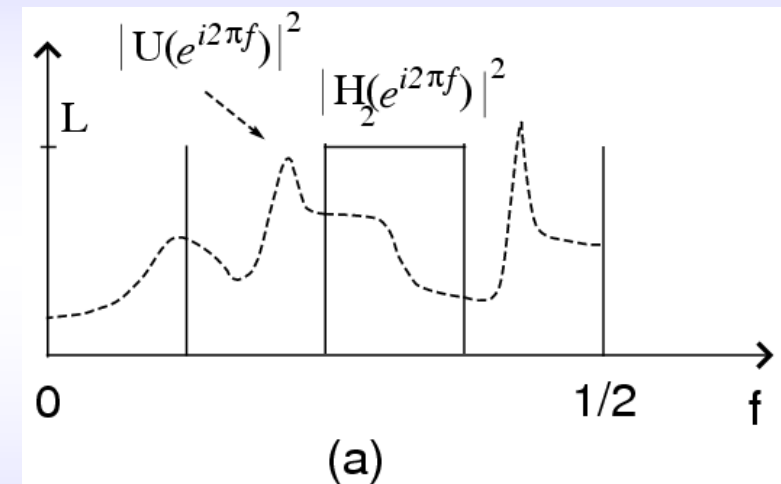
- ✓ **Conclusions et perspectives.**

Découpage en sous-bandes pour l'analyse spectrale: Avantages

Diminution de l'ordre des modèles
Hypothèse: banc de filtres idéal.



$$\text{Si } j \text{ est pair, } S_{x_j}(f) = \begin{cases} \frac{L^2}{M^2} S_u\left(\frac{f+j/2}{M}\right) & \text{si } 0 \leq f \leq 0.5 \\ 0 & \text{si } 0.5 \leq f \leq 1 \end{cases}$$



Découpage en sous-bandes pour l'analyse spectrale: Avantages

- ✓ **Nombre de conditionnement des matrices d'autocorrélation:**
Hypothèse: Modélisation AR $p_{sub} < p$ sur les signaux de sous-bandes
(<- réduction de l'ordre).

$$C_{R_u} = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$$

Où λ valeurs propres de la matrice d'autocorrélation.

-> Mesure de la stabilité numérique d'un système d'équations

Théorème d'entrelacement des valeurs propres

- Matrice d'autocorrélation à l'ordre p R_p valeurs propres ordonnées $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$
- Matrice d'autocorrélation à l'ordre $p-1$ R_{p-1} valeurs propres ordonnées $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{p-1}$

Alors: $\lambda_1 \geq \eta_1 \geq \lambda_2 \geq \eta_2 \geq \dots \geq \eta_{p-1} \geq \lambda_p$

Conséquence

$$C_{R_{p-1}} \leq C_{R_p}$$

Découpage en sous-bandes pour l'analyse spectrale: Avantages

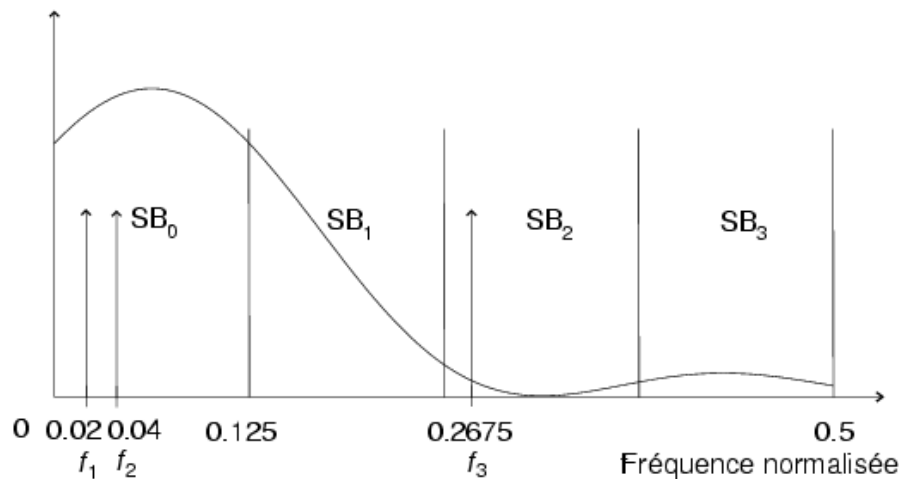
✓ **Résolution fréquentielle: gain d'un facteur M .**

2 composantes fréquentielles séparées de Δ_f sur le spectre du signal original



2 composantes fréquentielles séparées de $M\Delta_f$ sur le spectre des signaux de sous-bandes

Lié à la décimation uniquement



$$M = 4 \Rightarrow \begin{cases} Mf_1 = 0.08 \\ Mf_2 = 0.16 \\ Mf_3 = 1.07 \equiv 0.07 \end{cases}$$

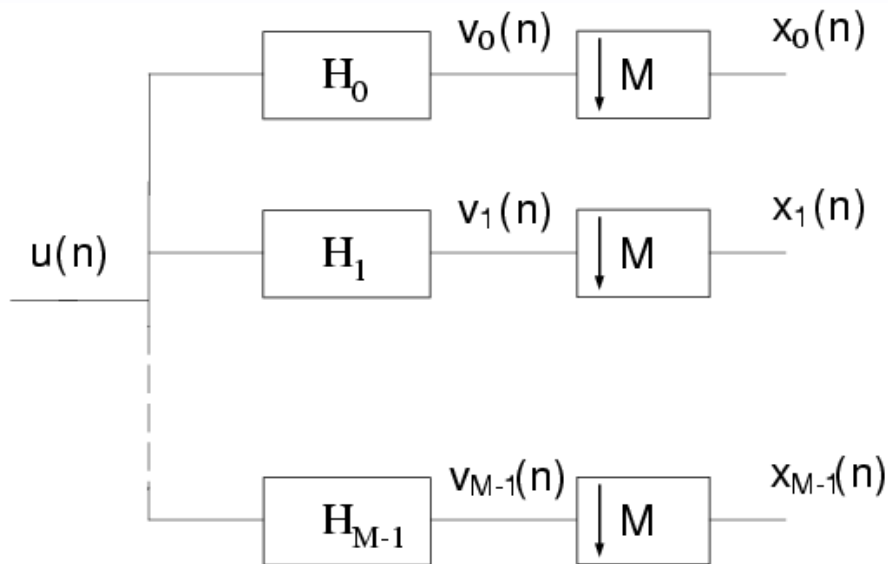
Découpage en sous-bandes pour l'analyse spectrale: Avantages

✓ Puissance de l'erreur de prédiction linéaire

hypothèses: - $u(n) \equiv$ signal *AR* d'ordre q .

- banc de filtres idéal, uniforme

- même ordre de modélisation large bande et sous-bandes



ρ_u erreur de prédiction linéaire large bande

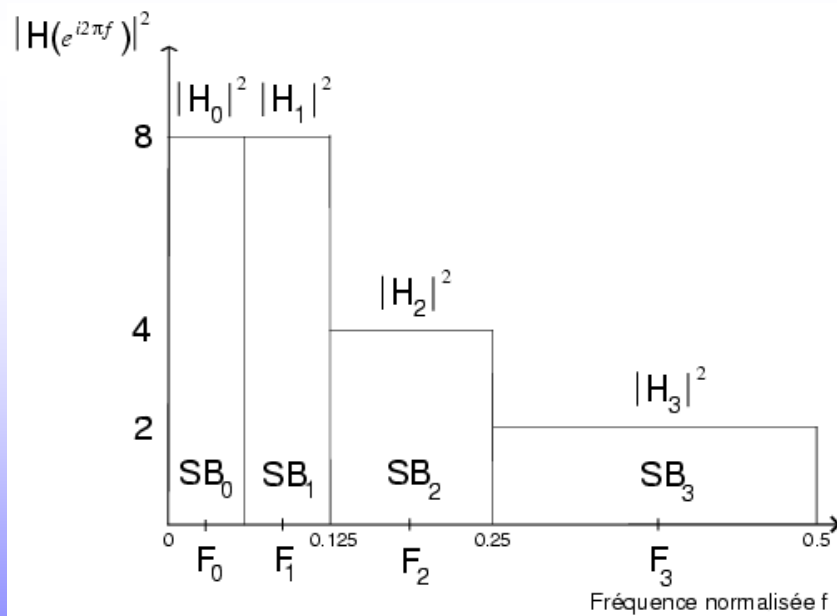
ρ_{x_j} erreur de prédiction linéaire sous-bandes

Dans [Rao-Pearlman], on montre que:

$$\text{pour } p \leq q, \rho_u \geq \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} \rho_{x_j}$$

Découpage en sous-bandes pour l'analyse spectrale: Avantages

- ✓ **Blanchiment de la densité spectrale de puissance**
hypothèse: **Filtres complémentaires en puissance**



Critère de blancheur:

$$\mathcal{F}_u = \frac{\exp \left[\int_{-1/2}^{1/2} \ln S_u(f) df \right]}{\sigma_u^2}$$

$$\mathcal{F}_u = 1 \iff \text{spectre plat}$$

Résultat de [Stoica-Friedlander]:

$$\prod_{j=0}^{M-1} \left(\mathcal{F}_{x_j} \right)^{\frac{1}{m_j}} \geq \mathcal{F}_u$$

Découpage en sous-bandes pour l'analyse spectrale: Avantages

✓ Rapport signal à bruit local

Hypothèses: - signal composé d'une somme de K exponentielles complexes non amorties noyées dans un bruit blanc $b(n)$.
- banc de filtres idéal (pas forcément uniforme).

$$u(n) = \sum_{l=0}^K A_l e^{i(2\pi f_l n + \phi_l)} + b(n)$$

Définition Rapport Signal à Bruit local pour la composante l

$$SNR_{l,u} = \frac{A_l^2}{\sigma_b^2}$$

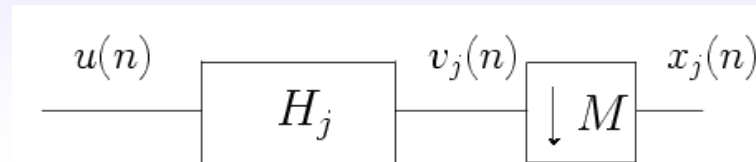
Bonne indication de la possibilité ou non d'estimer correctement la fréquence f_l

⇒ les signaux de sous-bandes sont toujours composés d'une somme d'exponentielles complexes noyées dans un bruit blanc

$$SNR_{l,x_j} = \frac{m_j A_l^2}{\sigma_b^2} = m_j SNR_{l,u}$$

Découpage en sous-bandes pour l'analyse spectrale: Inconvénients

- ✓ **Variance des estimateurs d'autocorrélation:**



Problème: augmentation de la variance d'estimation de l'autocorrélation du fait de la décimation:

$$\text{Var}[\hat{r}_{x_j}(k)] = \text{Var}[\hat{r}_{v_j}(Mk)] \geq \text{Var}[\hat{r}_{v_j}(k)]$$

Inconvénient à nuancer dans la pratique lorsqu'on prend le parti d'utiliser un ordre $p_{sub} = p/M$ dans les sous-bandes.

Découpage en sous-bandes pour l'analyse spectrale: Inconvénients

- ✓ **Recouvrement et continuité de l'estimateur spectral**
Reconstruction du spectre sous-bande par sous-bande \Rightarrow problèmes de continuité.
Utilisation de filtres non idéaux \Rightarrow problèmes de recouvrement spectral
- Simulation sur signal sinusoïdal + bruit:**

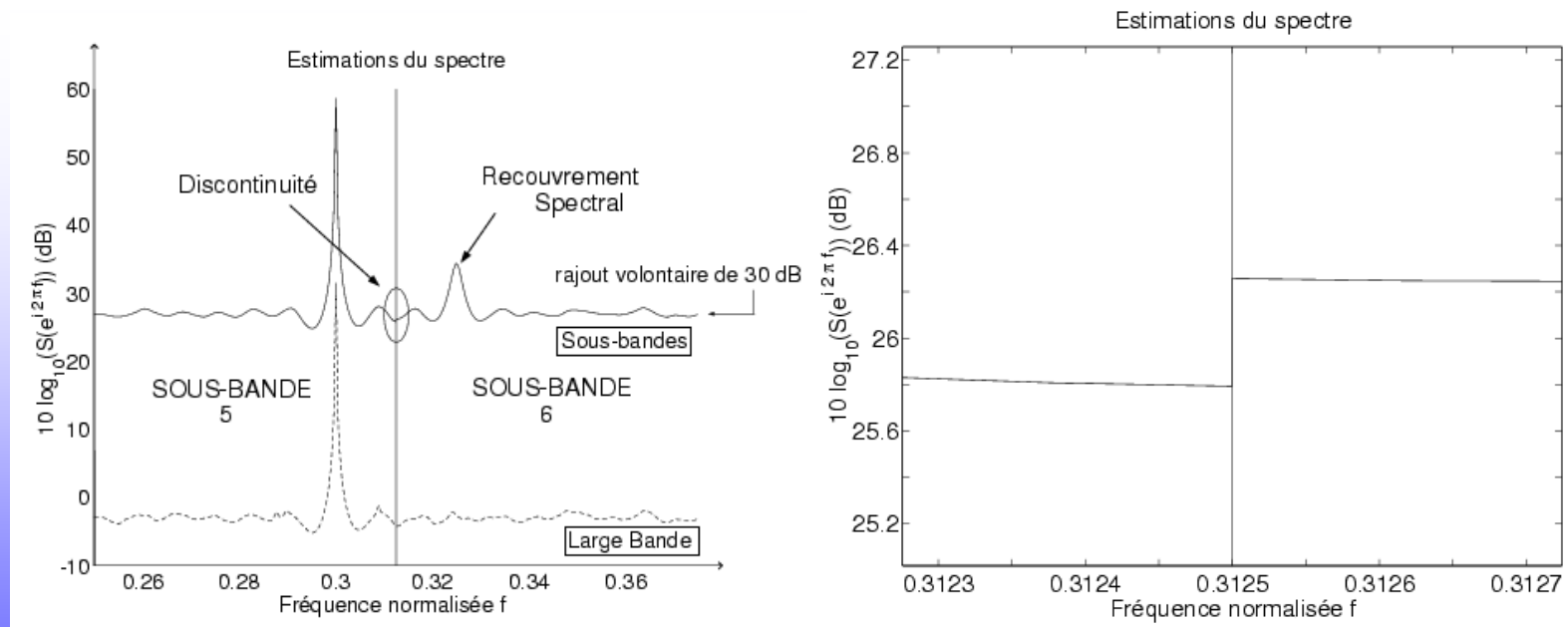
Paramètres

50 réalisations

$SNR=0$ dB

$p=128$

$M=8, p_{sub}=16$



Plan de la présentation

- ✓ **Présentation**
 - Analyse spectrale paramétrique.
 - Découpage en sous-bandes.

- ✓ **Intérêt du découpage en sous-bandes pour l'analyse spectrale et les problèmes rencontrés.**

- ✓ **Travaux originaux**
 - Élimination des problèmes dus au recouvrement spectral.
 - Utilisation des intercorrélations entre les sous-signaux issus de la décimation.

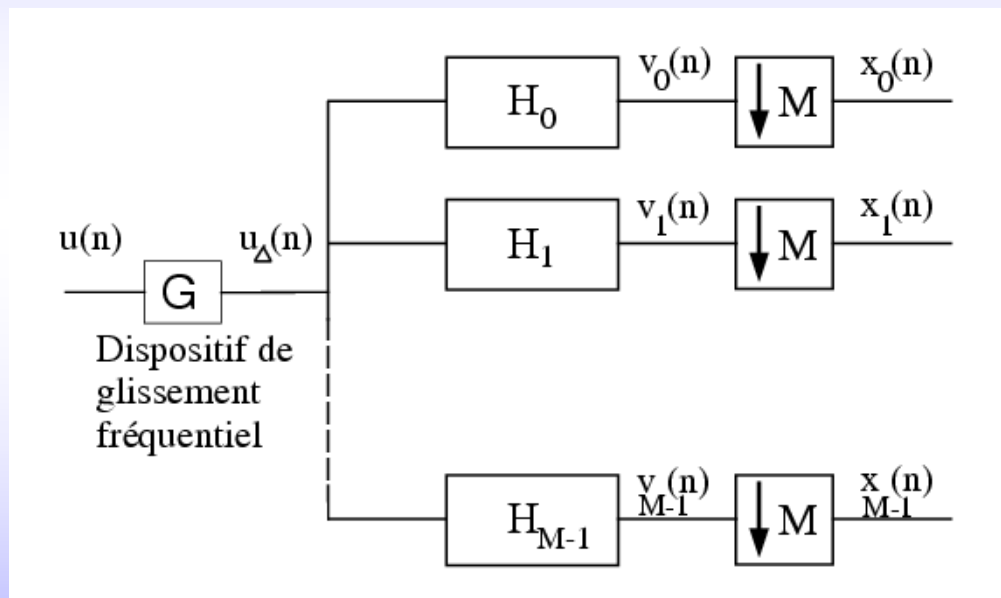
- ✓ **Conclusions et perspectives.**

Travaux Originaux

- ✓ Méthodes destinées à éviter le recouvrement spectral et les discontinuités du spectre.

Principe général

Pour chaque $\nu \in [0,1]$ faire



- 1 - Utilisation du dispositif de glissement fréquentiel pour ramener la fréquence ν au milieu de sa sous-bande de sorte que:

$$|\hat{U}_\Delta(e^{i2\pi F_j})|^2 = |\hat{U}(e^{i2\pi\nu})|^2$$

- 2 - Découpage en sous-bandes et estimation du spectre de $x_j(n)$ en un unique point fréquentiel

$$|\hat{X}_j(e^{i2\pi MF_j})|^2$$

- 3 - Utilisation des relations de filtrage linéaire et sur la décimation pour en déduire

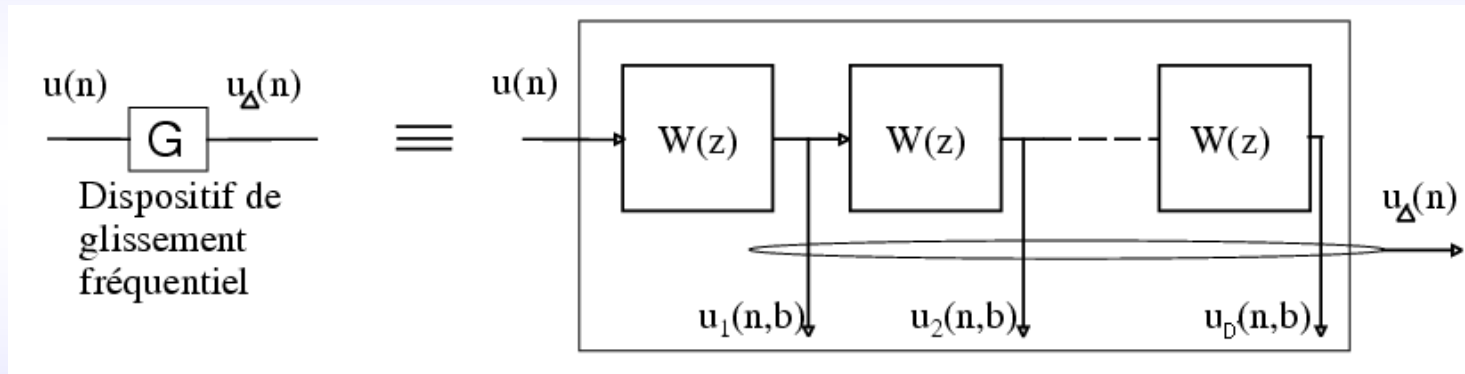
$$|\hat{U}_\Delta(e^{i2\pi F_j})|^2$$

-> Temps de calcul important (sauf pour Fourier)

Travaux Originaux

- ✓ Méthodes destinées à éviter le recouvrement spectral et les discontinuités du spectre.

Projection sur des bases de Laguerre (1/2)



Filtres RII passe-tout

$$W(z) = \frac{z^{-1} - b}{1 - bz^{-1}}$$

$$\begin{bmatrix} u_1(0) & u_2(0) & \dots & u_D(0) \\ u_1(1) & u_2(1) & & u_D(1) \\ \dots & & & \\ u_1(N-1) & u_2(N-1) & & u_D(N-1) \end{bmatrix}$$

Travaux Originaux

- ✓ Méthodes destinées à éviter le recouvrement spectral et les discontinuités du spectre.

Projection sur des bases de Laguerre (2/2)

Simulation sur signal sinusoïdal + bruit

$$S_{u_{\Delta}}(f) = S_u(\theta_b(f) / 2\pi)$$

Avec

$$\theta_b(f) = 2\pi f + 2 \arctan \left(\frac{b \sin 2\pi f}{1 - b \cos 2\pi f} \right)$$

Paramètres

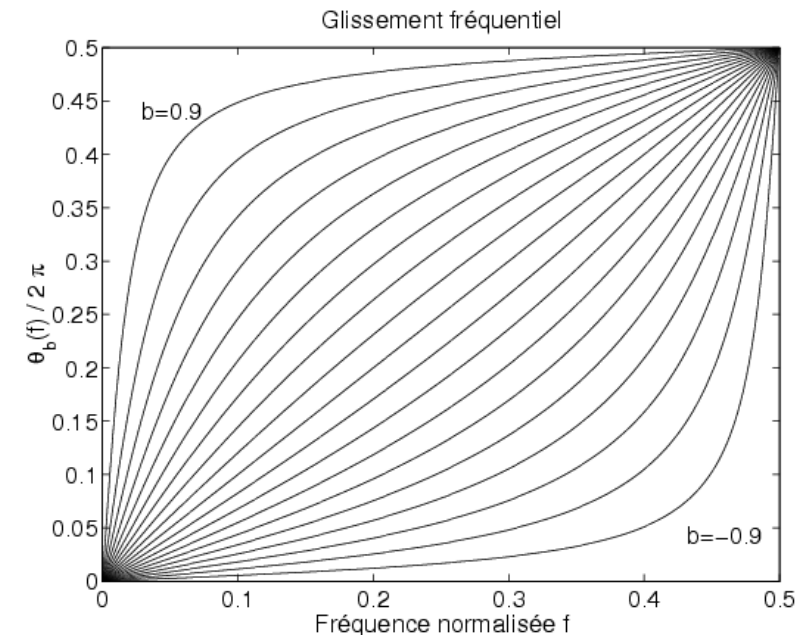
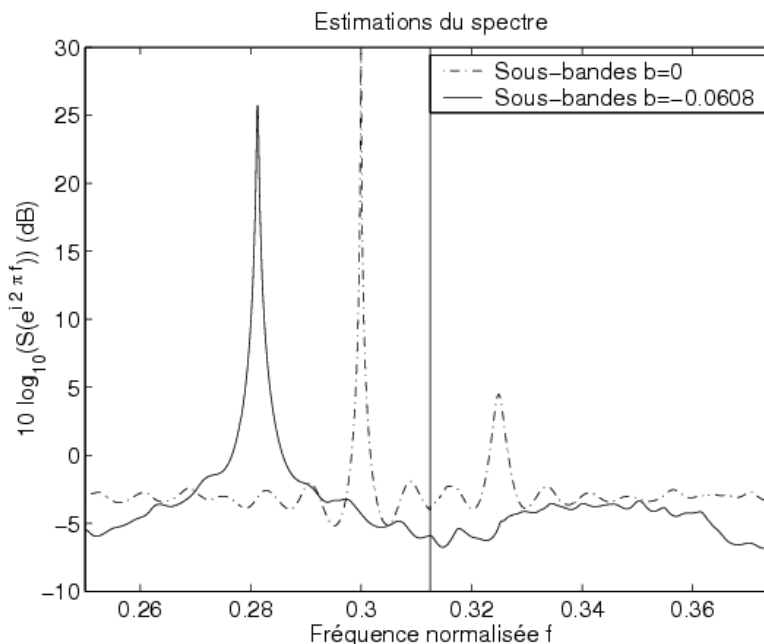
50 réalisations

SNR=0 dB

$p=128$

$M=8$

$p_{sub} = 16$

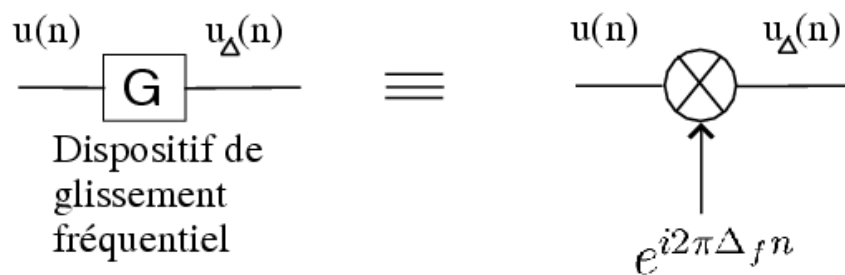


Travaux Originaux

- ✓ Méthodes destinées à éviter le recouvrement spectral et les discontinuités du spectre.

Utilisation de filtres-peigne (1/4)

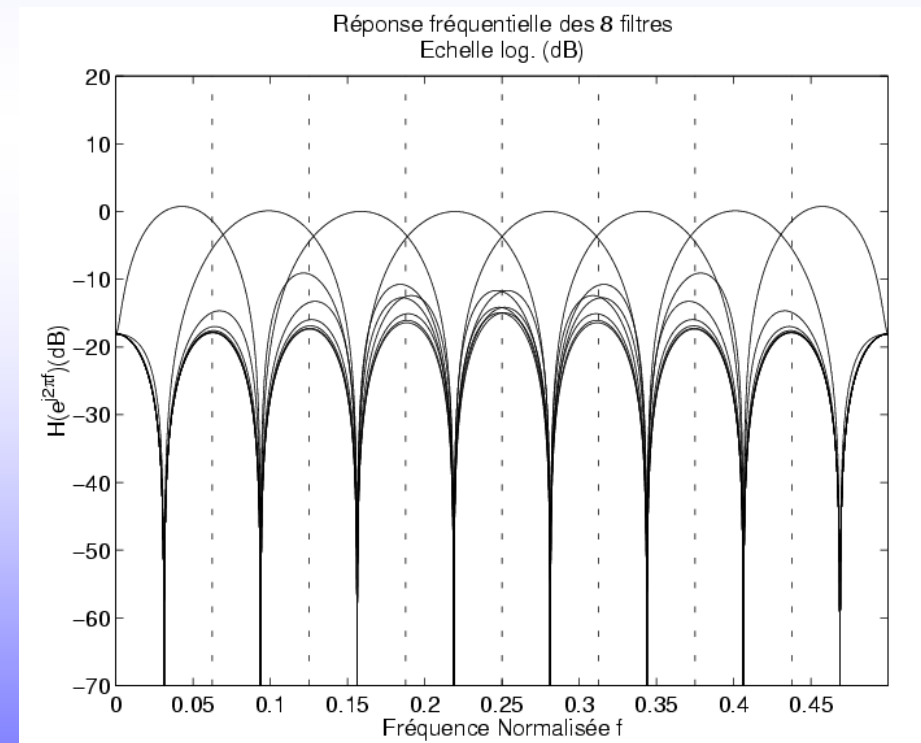
Utilisation conjointe d'un banc de filtres approprié et d'un dispositif de glissement fréquentiel par exponentielles complexes



Filtres
$$h(n) = \begin{cases} 1/\sqrt{L} & \text{si } 0 \leq n \leq L - 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Propriété: la réponse fréquentielle des filtres s'annule tous les $k/M \Rightarrow$ Élimination du recouvrement en $f=MF_j$

Si L multiple de M ,
$$\left| H_j(e^{i2\pi(F_j - \frac{k}{M})}) \right|^2 = \begin{cases} L & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



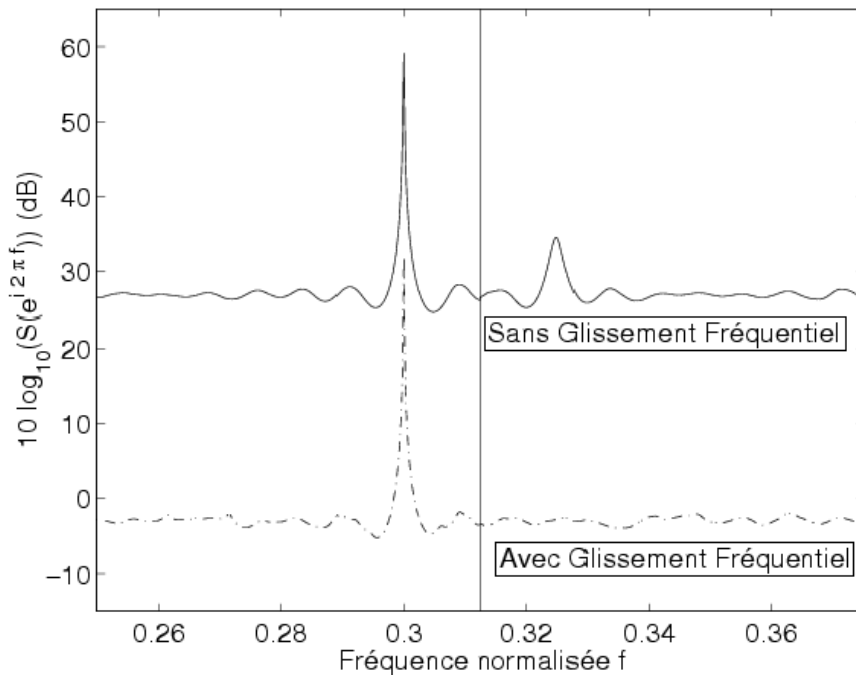
Travaux Originaux

- ✓ Méthodes destinées à éviter le recouvrement spectral et les discontinuités du spectre.

Utilisation de filtres-peigne (2/4)

Simulation sur signal sinusoïdal + bruit

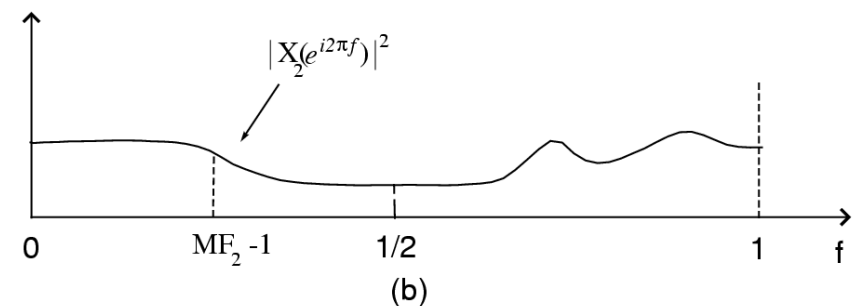
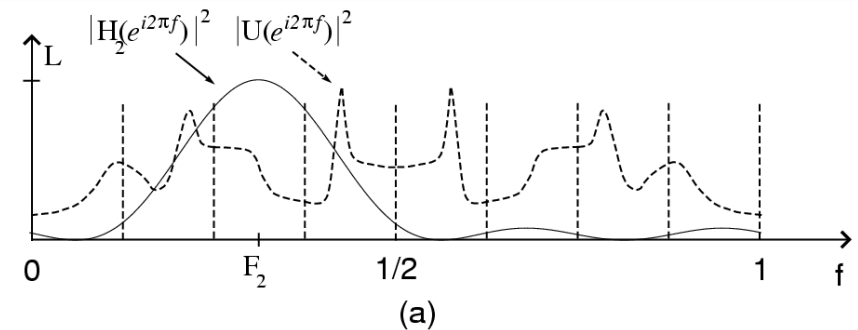
Estimations du spectre dans les sous-bandes



Paramètres

50 réalisations, $SNR=0$ dB

$p=128$, $M=8$, $p_{sub}=16$



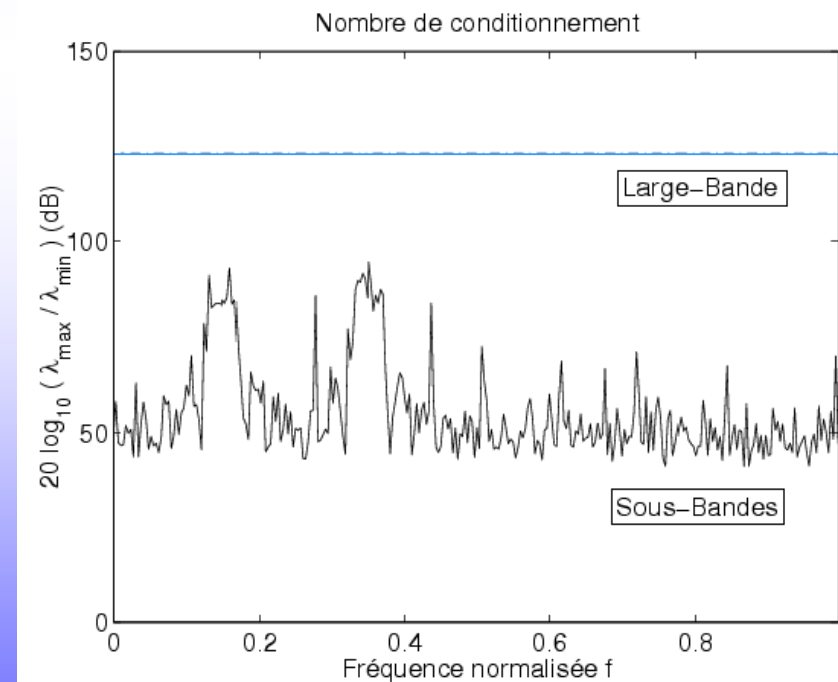
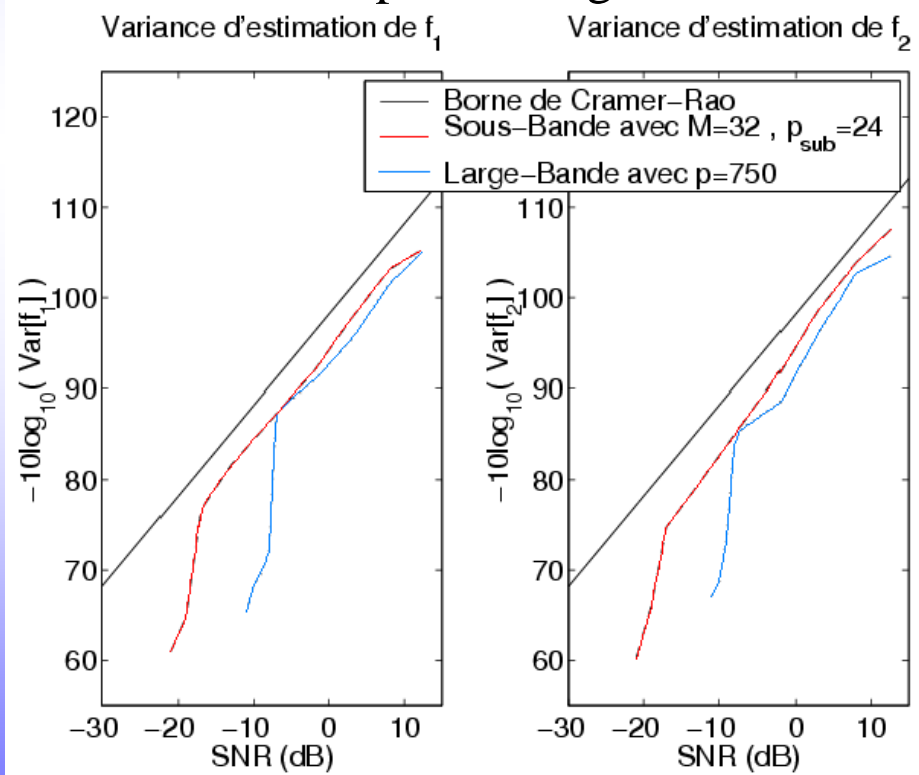
Travaux Originaux

- ✓ Méthodes destinées à éviter le recouvrement spectral et les discontinuités du spectre.

Utilisation de filtres-peigne (3/4)

Recul de la borne de Cramer-Rao de l'estimateur de fréquences et amélioration du conditionnement pour un signal constitué de raies pures de la forme

$$u(n) = A_1 e^{i2\pi f_1 n + \phi_1} + A_2 e^{i2\pi f_2 n + \phi_2} + b(n)$$



Travaux Originaux

- ✓ Méthodes destinées à éviter le recouvrement spectral et les discontinuités du spectre.

Utilisation de filtres-peigne (4/4)

Simulation sur signal physique issu d'un accéléromètre placé sur un engrenage au bout de 11 jours de fonctionnement. Référence: périodogramme du signal calculé à partir de 65000 échantillons.

Paramètres

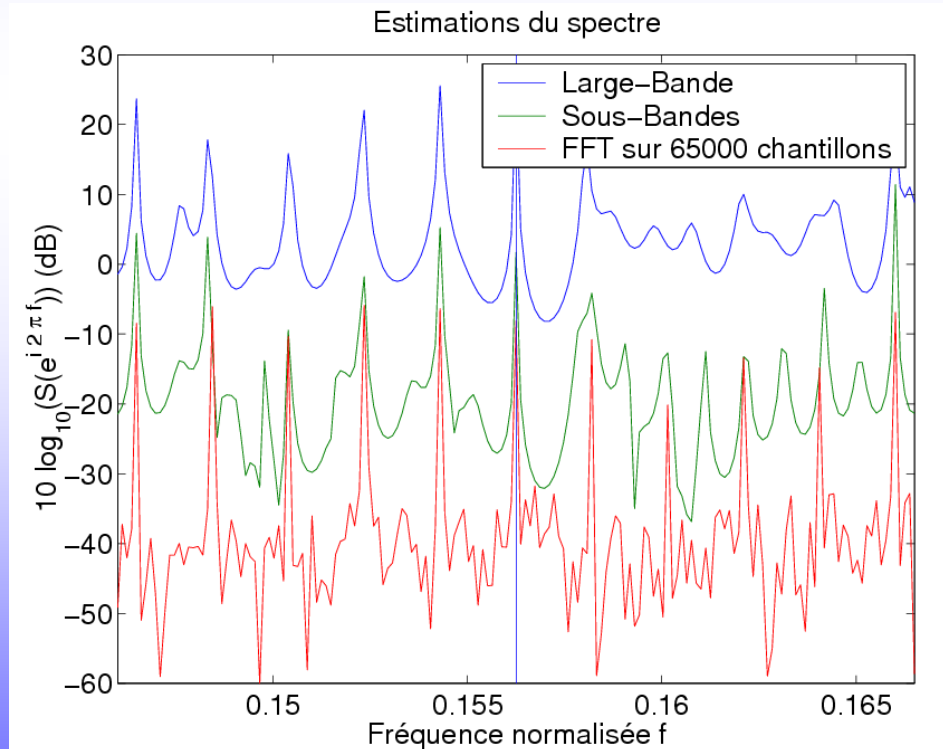
$N=3000$ échantillons

1 réalisation

$p=1024$: ordre « large-bande »

$M=16$ sous-bandes

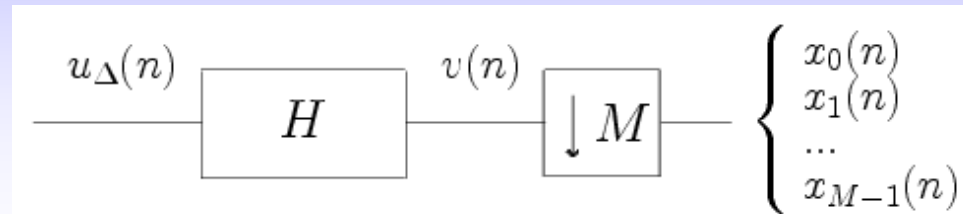
$p_{sub}=64$: ordre sous-bandes



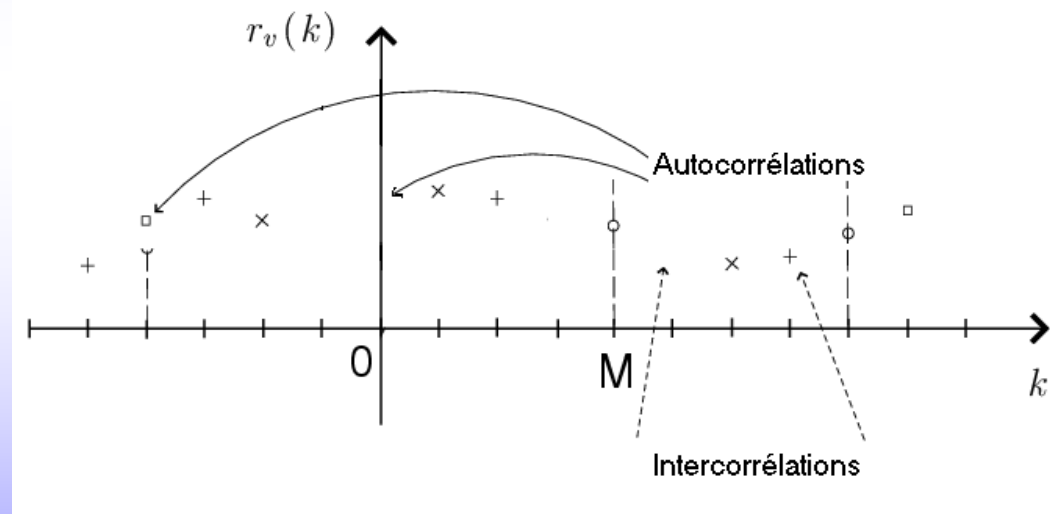
Travaux Originaux

- ✓ Méthodes destinées à tirer parti de l'intercorrélation entre les sous-signaux issus de la décimation.

Idee de base



Autocorrélations et Intercorrélations



⇒ Trouver des méthodes capables d'exploiter l'information apportée par la connaissance de l'intercorrélacion entre les signaux issus de la décimation pour une sous-bande j fixée.

Travaux Originaux

- ✓ Méthodes destinées à tirer parti de l'intercorrélation entre les sous-signaux issus de la décimation.

Modèles AR avec Décalage Temporel (1/3)

Estimation des paramètres

$$r_v(Ms + l - M) + \sum_{k=1}^{p_{sub}} a_{k,l} r_v(M(s - k)) = 0$$

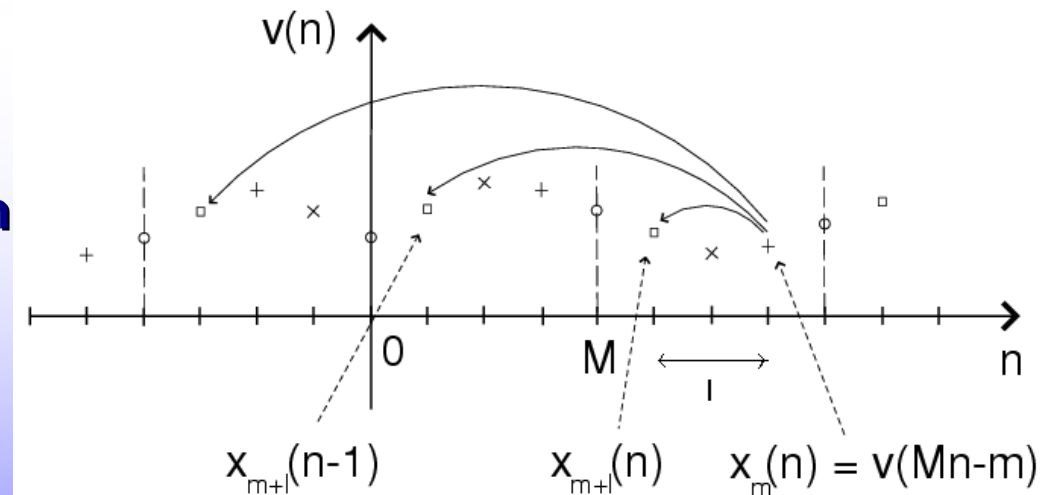
Propriétés de l'erreur de prédiction

$$r_{e_{l,m}}(s) = r_{v_j}(Ms) + \sum_{k=1}^{p_{sub}} a_{k,l} r_{v_j}(M(s - k + 1) - l)$$

Spectre du modèle en Mf_j

$$|X_{j,m}(e^{i2\pi MF_j})|^2 = \frac{|E_{l,m}(e^{i2\pi MF_j})|^2}{\left| 1 + \sum_{k=1}^{p_{sub}} a_{k,l} e^{-i2\pi F_j(Mk - M + l)} \right|^2}$$

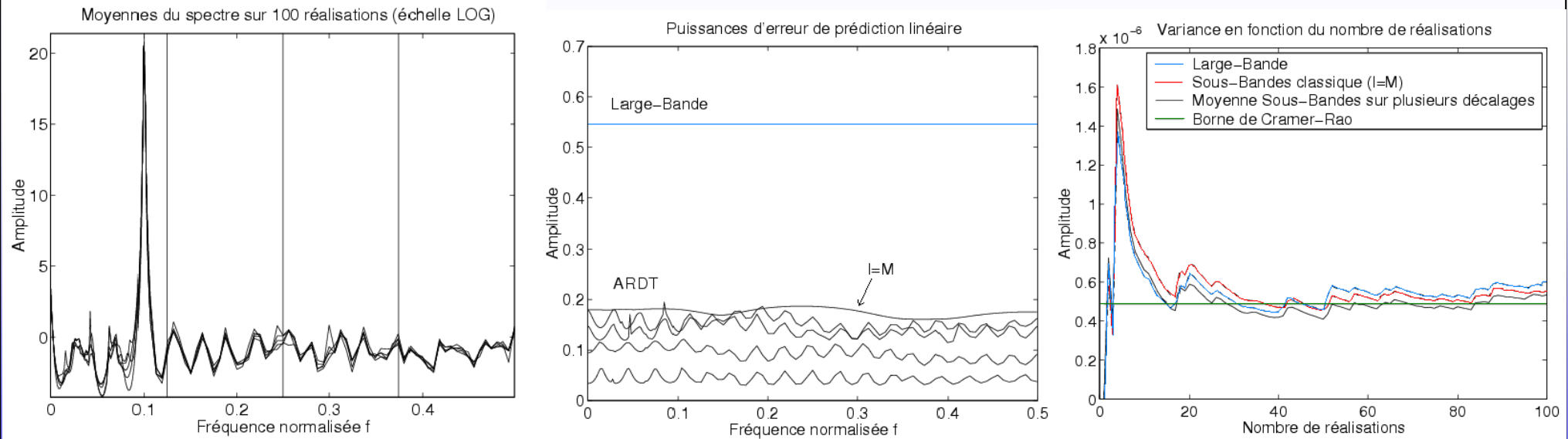
$$\hat{x}_{l,m}(n) = - \sum_{k=1}^{p_{sub}} a_{k,l} x_{m+l}(n - k + 1), \forall l \geq 1 \text{ et } m \in \{0, \dots, M - 1\}$$



Travaux Originaux

- ✓ Méthodes destinées à tirer parti de l'intercorrélation entre les sous-signaux issus de la décimation.
Modèles AR avec Décalage Temporel (2/3): simulations sur signaux à spectre de raies: signal sinusoïdal bruité

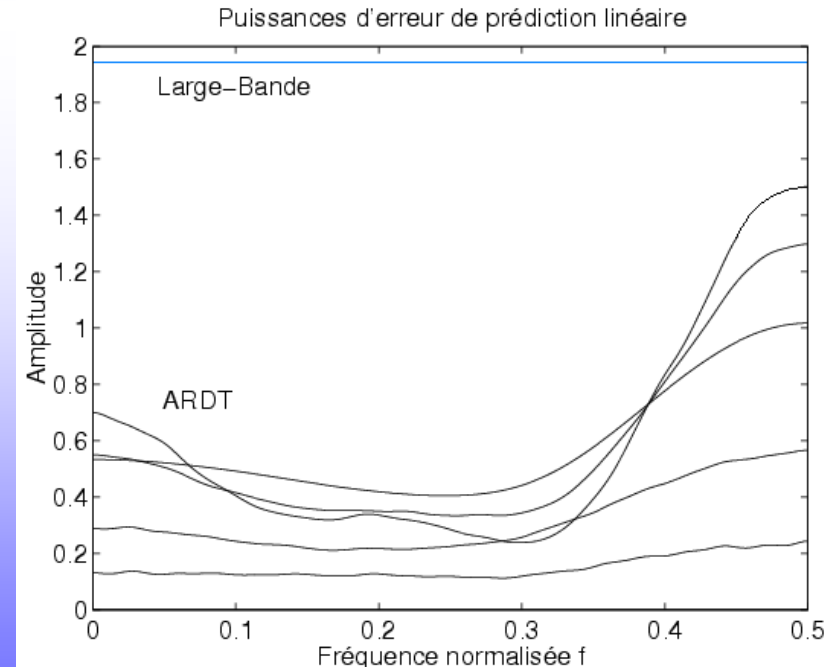
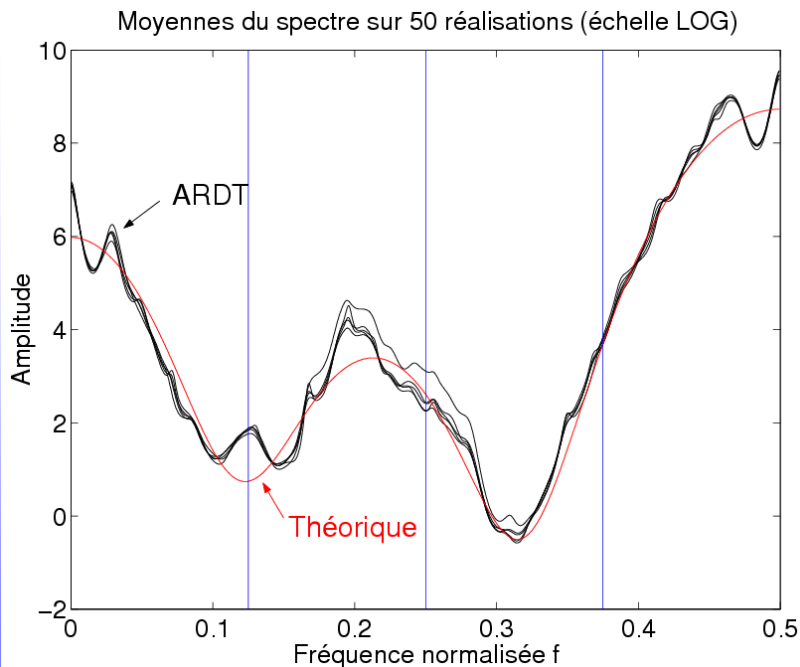
Paramètres: $A_1 = 1, f_1 = 0.1, SNR = -2 \text{ dB}, N = 100$ échantillons, 100 réalisations
 $p = 1024, p_{sub} = 64, M = 16$ sous-bandes, $l = 2, 3, 4, 5, 6$



Travaux Originaux

- ✓ Méthodes destinées à tirer parti de l'intercorrélation entre les sous-signaux issus de la décimation.
Modèles *AR* avec Décalage Temporel (3/3): simulations sur signaux à spectre continu: signal *MA(6)* bruité

Paramètres: $N=100$ échantillons, 50 réalisations, $p=16$
 $p_{sub}=4$, $M=4$ sous-bandes



Travaux Originaux

- ✓ Méthodes destinées à tirer parti de l'intercorrélation entre les sous-signaux issus de la décimation.

Modèles AR Multi-Dimensionnel (1/2)

Application de la modélisation AR multidimensionnelle à l'estimation du spectre commun des sous-séries

$$\hat{x}_j(n) = - \sum_{k=1}^{p_{sub}} A_k \underline{x}_j(n-k)$$

$$\underline{e}_j(n) = \underline{x}_j(n) - \hat{x}_j(n) = \underline{x}_j(n) + \sum_{k=1}^{p_{sub}} A_k \underline{x}_j(n-k)$$

$$\underline{x}_j(n) = \begin{bmatrix} x_{j,0}(n) \\ x_{j,1}(n) \\ \dots \\ x_{j,M-1}(n) \end{bmatrix}$$

Estimation des matrices de paramètres

$$\forall q \in \{1, \dots, p_{sub}\}, K_{x_j}(q) = - \sum_{k=1}^{p_{sub}} A_k K_{x_j}(q-k)$$

Spectre du modèle

$$\hat{P}_{AR}(f) = A^{-1} K_{e_j}(0) A^{-1H}$$

Avec
$$A = I + \sum_{k=1}^{p_{sub}} A_k e^{-i2\pi f k}$$

Propriétés de l'erreur de prédiction

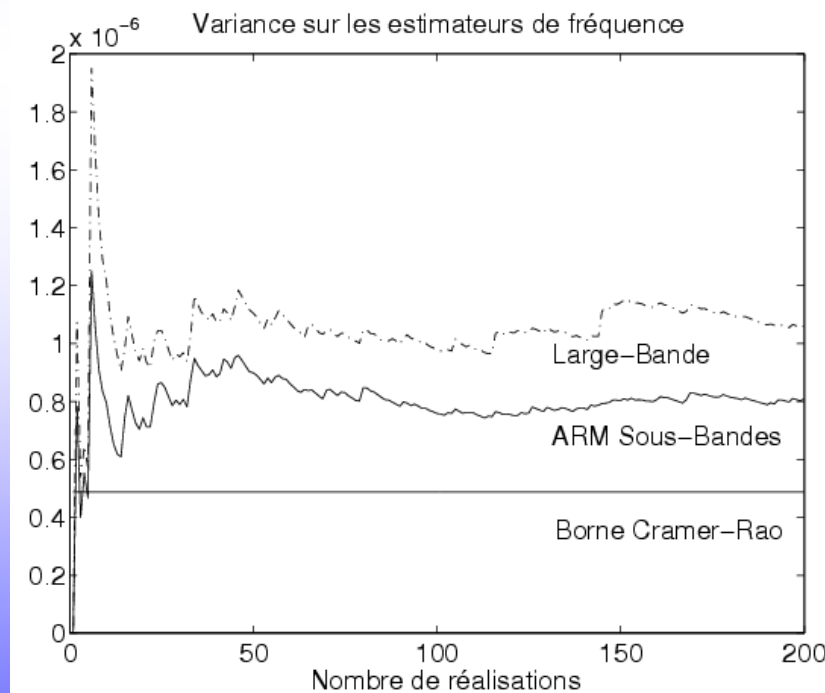
$$\forall s \geq 0, K_e(s) = K_x \delta(s)$$

Travaux Originaux

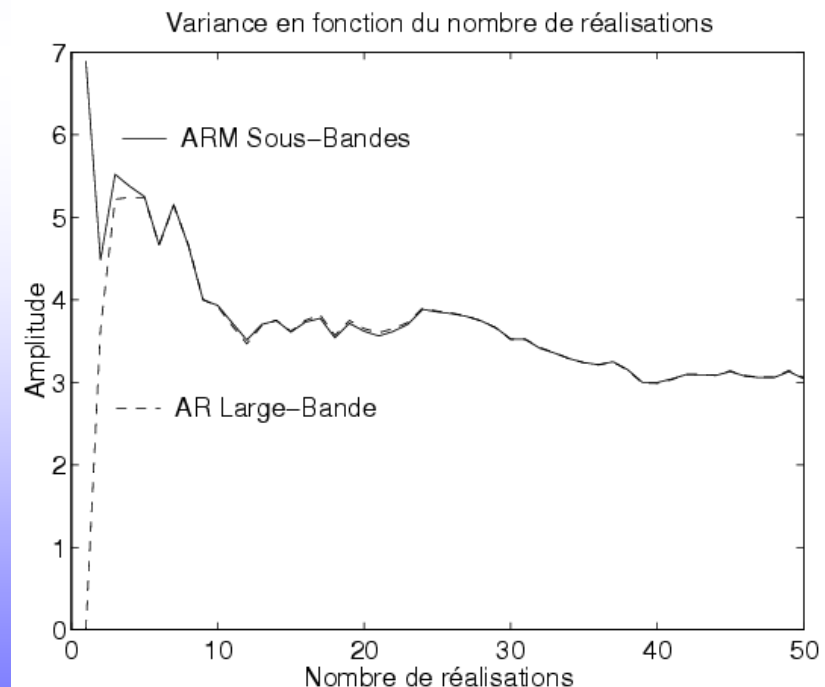
- ✓ Méthodes destinées à tirer parti de l'intercorrélation entre les sous-signaux issus de la décimation.

Modèles *AR* Multi-Dimensionnel (2/2)

Simulation sur signal à spectre de raies



Simulation sur signal à spectre continu



Plan de la présentation

- ✓ **Présentation**
 - Analyse spectrale paramétrique.
 - Découpage en sous-bandes.

- ✓ **Intérêt du découpage en sous-bandes pour l'analyse spectrale et les problèmes rencontrés.**

- ✓ **Travaux originaux**
 - Élimination des problèmes dus au recouvrement spectral.
 - Utilisation des intercorrélations entre les sous-signaux issus de la décimation.

- ✓ **Conclusions et perspectives.**

Conclusions et perspectives

- ✓ **Deux méthodes destinées à éviter le recouvrement spectral et les problèmes de continuité de l'estimateur.**
 - Méthodes valables pour tout type d'analyse spectrale.
 - Permettent de conserver les bonnes propriétés du découpage en sous-bandes pour l'analyse spectrale.

- ✓ **Deux méthodes de modélisation adaptées aux signaux issus des sous-bandes (utilisation des intercorrélations).**
 - Modèles *AR* multidimensionnels.
 - Modèles *AR* avec décalage temporel.

Conclusions et perspectives

- ✓ **Le découpage en sous bande**
 - Utile uniquement dans les cas « extrêmes » (signaux spectralement très riche ou proximité à la borne de Cramer-Rao).
 - Permet de repousser les limites intrinsèques aux modélisations paramétriques.

- ✓ **Perspectives**
 - Techniques « best basis » (sous une contrainte) pour la synthèse du banc de filtres approprié au signal à analyser.
 - Modélisation de signaux filtrés: prise en compte des filtres de découpage en sous-bandes.