

## Modélisation et prédiction des produits d'intermodulation passifs

Jacques Sombrin<sup>1</sup>, Geoffroy Soubercaze-Pun<sup>2</sup>, Isabelle Albert<sup>2</sup>

<sup>1</sup>TéSA, 14-16 port St Etienne, 31000Toulouse

<sup>2</sup>CNES, 18 Avenue Edouard Belin, 3401 Toulouse Cedex 09

*jacques.sombrin@tesa.prd.fr : correspondant principal*

### Résumé

*Les dispositifs passifs ne sont pas parfaitement linéaires aux très fortes puissances. Ils créent des harmoniques et des produits d'intermodulation pairs et impairs. Ces produits peuvent perturber fortement les performances des récepteurs utilisant les mêmes équipements passifs ou simplement installés sur le même site que les émetteurs. Ces produits n'obéissent pas à la loi classique de croissance en fonction de la puissance d'entrée avec une pente en dB/dB égale à l'ordre du produit. Ceci a interdit, jusqu'à présent, de modéliser correctement ces dispositifs. On propose une modélisation par des fonctions non analytiques qui permet de mieux reproduire cette caractéristique avec un nombre minimal de coefficients et à partir d'un nombre minimal de mesures.*

### 1. Introduction

Les produits d'intermodulation passifs (PIM) posent un problème aux émetteurs-récepteurs placés sur les satellites dès lors qu'une partie de la chaîne sert à la fois à l'émission et à la réception. C'est le cas en particulier, des antennes, des liaisons coaxiales ou en guides d'ondes, des filtres ou duplexeurs et des polariseurs. Lorsque des signaux d'émission de forte puissance traversent ces équipements passifs, ils créent des harmoniques et des produits d'intermodulation d'ordres pairs et impairs. Ces produits sont de niveau très faible, de l'ordre de 100 à 150 dB en dessous des porteuses émises. Lorsque leur fréquence est dans la bande de réception, cette puissance est cependant suffisante pour désensibiliser les récepteurs ou même rendre impossible leur utilisation simultanée avec l'émetteur.

La minimisation de cet effet nécessite un effort de conception, de fabrication et de test sur ces dispositifs passifs. Dans certains cas, il est même nécessaire de séparer les antennes émission et réception. Ceci entraîne des coûts et une masse plus élevés ainsi qu'une baisse de la capacité installée sur le satellite.

Depuis quelques années, les stations de base de téléphonie mobile sont confrontées au même problème. Ceci est dû à l'augmentation de puissance, de bande passante et du nombre d'antennes des stations.

Ces problèmes se posent aussi sur les avions.

De nombreuses causes possibles ont été identifiées, en particulier, les résistances non linéaires ou variant en

température, le plaquage nickel ou les métaux magnétiques, la corrosion ou les mauvais contacts.

Une station de téléphonie a été perturbée par les PIM générés par le grillage rouillé de la clôture.

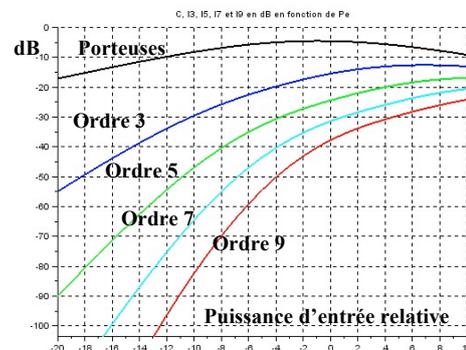
De nombreux auteurs [1]-[3] ont publié des résultats de mesure de tels produits. Des pentes de croissance en fonction de la puissance d'entrée comprises entre 1 et 3 dB/dB sont observées pour les produits d'ordre 3 mais aussi pour des produits d'ordre plus élevé.

Ces pentes ne sont pas explicables par la théorie classique qui repose sur la représentation d'une non linéarité analytique par un polynôme, son développement en série de Taylor autour du point de repos [4]-[7].

Nous proposons une modélisation par des fonctions non analytiques qui approchent mieux les mesures réalisées à deux porteuses et ceci avec un nombre de coefficients beaucoup plus petit qu'un polynôme [10]. Ceci permet de réaliser une meilleure extrapolation au-delà de la gamme de puissance des mesures et pour des signaux de type différent (multi porteuses ou modulés).

### 2. Théorie classique

Le modèle de Saleh [7] est un modèle analytique simple (fonction rationnelle). Il représente correctement les amplificateurs à tubes à onde progressive des satellites. Une simulation ou un calcul par la méthode classique donne les résultats présentés à la Figure 1.



**Figure 1. Porteuses et produits d'intermodulation à 2 porteuses d'ordre 3 à 9 simulés pour un modèle classique (analytique)**

On voit que dans la zone de petit signal, chaque produit croît en fonction de la puissance d'entrée avec une pente en dB/dB égale à son ordre. Pour une fonction

non linéaire  $f$  et un signal d'entrée en cosinus, une transformée de Fourier du signal de sortie donne les différents harmoniques ou produits d'intermodulation :

$$f[a \cos(\theta)] = \frac{1}{2} f_0(a) + \sum_m f_m(a) \cos(m\theta) \quad (1.)$$

La fonction  $f_m$  est la transformée de Tchébycheff de  $f$  d'ordre  $m$ . Pour un monôme de degré  $n$ ,  $f(x)=x^n$ , on a :

$$f_m(a) = 2 \cdot \left(\frac{|a|}{2}\right)^n \frac{n!}{\left(\frac{n+m}{2}\right)! \cdot \left(\frac{n-m}{2}\right)!} \quad (2.)$$

### 3. Théorie non analytique

Une non linéarité ne peut pas être modélisée par un polynôme si elle génère en petit signal des harmoniques ou produits d'intermodulation qui croissent en fonction de la puissance d'entrée avec des pentes (en dB/dB) :

- Non entières (réelles ou fractionnaires) ;
- Paires pour les ordres impairs ;
- Impaires pour les ordres pairs.

Nous avons dans un premier temps généralisé les polynômes en utilisant, en plus des polynômes  $P$  :

$$y = P(x) \quad (3.)$$

des fonctions non analytiques à l'origine, de la forme :

$$y = \text{signe}(x) \cdot P(x) \quad (4.)$$

Il est alors plus simple de séparer l'ensemble des fonctions utilisées en fonctions paires comportant uniquement des termes de la forme :

$$y = |x|^n \quad (5.)$$

et fonctions impaires avec des termes de la forme :

$$y = \text{signe}(x) \cdot |x|^n \quad (6.)$$

On voit que la parité (symétrie ou antisymétrie) de ces fonctions ne dépend plus de la parité du degré  $n$  auquel est élevé le module de l'entrée. De plus, le module étant positif, on peut l'élever à n'importe quelle puissance, entière ou non. On peut donc généraliser les fonctions utilisées en acceptant aussi les puissances non entières, fractionnaires ou réelles  $p$  :

$$y = |x|^p \quad \text{et} \quad y = \text{signe}(x) \cdot |x|^p \quad (7.)$$

Un degré réel  $p$  supérieur à -1 assure la convergence mathématique mais ceci n'est pas suffisant pour un modèle physique. Il faut que  $p$  soit positif ou nul pour que la puissance de sortie ne soit pas infinie (pour un équipement actif avec alimentation en plus de l'entrée signal). Il faut que le degré soit supérieur ou égal à 1 pour que la puissance de sortie soit inférieure ou égale à la puissance d'entrée (pour un équipement passif).

Parmi ces modèles non analytiques, on peut citer le modèle du relais ou trigger de Schmidt :  $y = \text{signe}(x)$

et le redresseur linéaire double alternance :  $y = |x|$ .

On peut calculer les harmoniques ou produits d'intermodulation générés par ces fonctions non linéaires en utilisant la transformée de Tchébycheff [5,6]. On constate que les fonctions que l'on a proposées sont des invariants de la transformée de Tchébycheff, tout comme les monômes et que le calcul est aussi simple. La transformée d'ordre  $m$  de la fonction impaire de degré  $p$  :

$f(x) = \text{signe}(x) \cdot |x|^p$  est :

$$f_m(a) = 2 \cdot \text{signe}(a) \cdot \left(\frac{|a|}{2}\right)^p \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{p+m}{2}+1\right) \cdot \Gamma\left(\frac{p-m}{2}+1\right)}$$

pour  $m$  entier impair seulement (8.)

Nous constatons que dans cette formule, si le degré  $p$  réel n'est pas un entier impair (donc si la fonction n'est pas un polynôme impair classique), le terme  $(p-m)/2$  n'est jamais un entier négatif, quel que soit  $m$  impair et donc que le dénominateur n'est jamais infini.

Les fonctions de degré réel, non entier impair, génèrent donc tous les harmoniques, y compris des harmoniques de rang supérieur au degré, contrairement aux polynômes et aux fonctions analytiques.

Par ailleurs ces harmoniques ont une amplitude de sortie proportionnelle à l'amplitude d'entrée élevée à la puissance  $p$ . Sur un graphe en dB, tous les harmoniques (ou tous les produits d'intermodulation) suivent des droites de pente  $p$  dB/dB.

C'est bien le cas pour le trigger de Schmidt et le redresseur linéaire double alternance dont les sorties comportent tous les harmoniques, impairs pour le premier avec des puissances constantes donc des pentes de 0dB/dB et pairs pour le second avec des pentes de 1dB/dB.

On donne ci-après un exemple des porteuses et produits d'intermodulation à deux porteuses de la fonction impaire de degré 2 :  $y = \text{signe}(x) \cdot |x|^2$ .

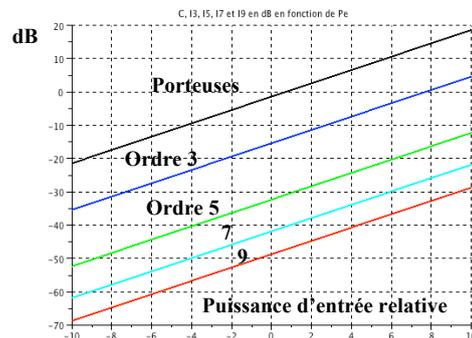


Figure 2. Porteuses et PIM à 2 porteuses, d'ordres 3 à 9 simulés pour le modèle de degré 2

Les porteuses suivent la même pente que les produits dans ce cas où il n'y a que le seul terme non linéaire dans la fonction. Les porteuses suivront une droite de pente 1 dB/dB en petit signal si un terme linéaire est présent.

On remarquera qu'un modèle classique ne comprenant qu'un seul terme non linéaire de degré entier impair  $n$  donnerait des pentes de  $n$  dB/dB mais

uniquement les produits d'ordre inférieur ou égal à  $n$ . Les pentes en petit signal pour un modèle classique ne sont en fait pas égales à l'ordre mais au plus petit degré existant supérieur ou égal à l'ordre.

À puissance d'entrée donnée, les harmoniques ou produits créés par un seul terme non linéaire sont proportionnels à un coefficient, la fraction dans (8), qui ne dépend que du degré  $p$ , réel, et du rang ou ordre  $m$ , entier positif ou nul. Les tracés de ces coefficients en fonction de degré pour les ordres impairs sont donnés à la figure suivante. Une figure semblable peut être tracée pour les harmoniques pairs en sortie des fonctions paires.

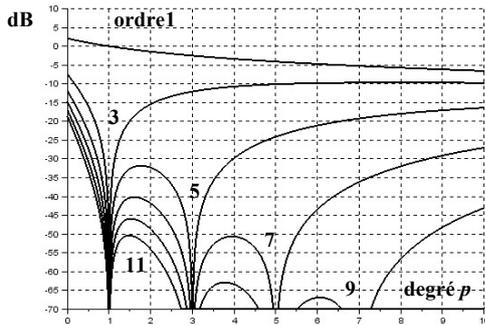


Figure 3. PIM d'ordres impairs à 2 porteuses en fonction du degré  $p$  du terme non linéaire

#### 4. Comparaison avec des mesures publiées

La Figure 4 reproduit une partie des mesures obtenues sur une ligne micro-ruban à 900 MHz et publiées, figure 6 de l'article [1]. Les pentes ont été estimées par les auteurs à 1,6 dB/dB pour les produits d'ordre 3 ; 1,9 dB/dB pour l'ordre 5 ; 2,3dB/dB pour l'ordre 7 et 2,5 dB/dB pour l'ordre 9. Les mesures montrent des pentes quasiment constantes sur une gamme de niveaux d'entrée de 14 dB. Les rapports entre produits successifs sont quasiment constants, soit :

$$I3/I5 \approx 13 \text{ dB}; \quad I5/I7 \approx 15 \text{ dB}; \quad I7/I9 \approx 12 \text{ dB}.$$

On voit que ces caractéristiques mesurées seront beaucoup mieux modélisées par un modèle non analytique ayant un degré de l'ordre de grandeur de la pente mesurée. On constate aussi sur la figure 3 que la pente de 1,6 dB/dB mesurée par les auteurs sur le produit d'ordre 3 correspond à un produit d'ordre 5 environ 13 dB en dessous, ce qui est cohérent avec les mesures.

Un premier modèle non analytique de degré 1,6 a permis d'obtenir les résultats de la figure 4.

On constate que la simulation du produit d'ordre 5 est correcte mais s'écarte des mesures en haut et en bas de la gamme de puissance d'entrée, en des points où la pente du produit d'ordre 3 s'écarte aussi de la valeur moyenne 1,6. La figure 3 montre qu'un degré plus élevé donnerait effectivement un rapport I3/I5 supérieur et un degré plus faible un rapport I3/I5 inférieur.

Une pente plus élevée en début de courbe et plus faible en fin de courbe permettrait donc d'approcher mieux à la fois le produit d'ordre 3 et le produit d'ordre 5.

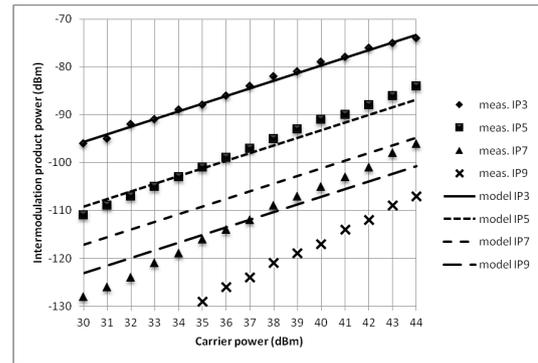


Figure 4. PIM d'ordres 3 à 9 mesurés (points), et simulés à partir du modèle de degré 1,6 (courbes).

Les coefficients d'un modèle non analytique comportant deux termes non linéaires de degrés 2 et 2,5 ont été déterminés pour minimiser l'erreur quadratique moyenne sur le produit d'intermodulation d'ordre 3 sur la totalité de la gamme de puissance d'entrée.

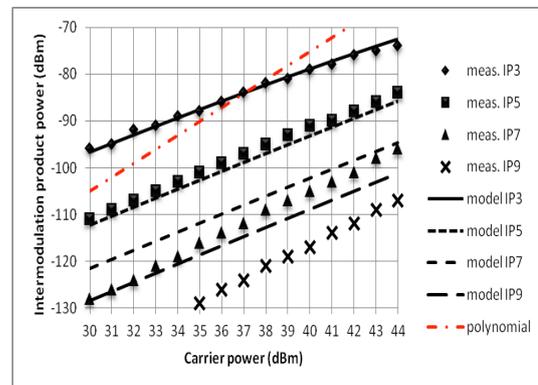


Figure 5. PIM d'ordres 3 à 9 mesurés (points), produits du modèle non analytique (courbes noires), produit d'ordre 3 d'un modèle polynomial (en rouge).

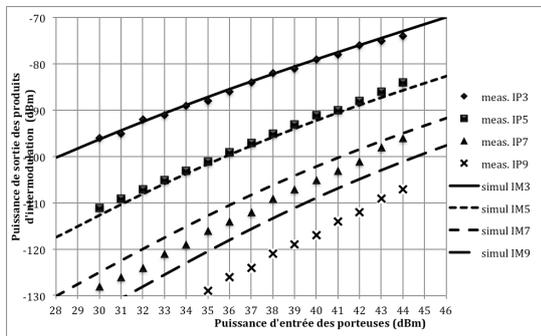
On constate une très bonne concordance entre les mesures et la simulation pour l'ordre 3 (erreur de 1 dB) et pour l'ordre 5 (erreur de 2 dB). Le modèle est pessimiste mais acceptable pour l'ordre 7 (erreur inférieure à 5 dB) et pour l'ordre 9 (erreur inférieure à 10 dB).

Un modèle polynomial simple a une pente de 3 dB/dB pour l'ordre 3 et donne une erreur de  $\pm 10$ dB sur la gamme de puissances d'entrée de 14 dB. Par ailleurs, pour obtenir un produit d'ordre 5 à 13 dB en dessous de l'ordre 3, il faudrait un terme de degré 5 ayant un coefficient élevé qui perturberait la courbe de puissance du produit d'ordre 3 en fonction de la puissance d'entrée.

Certains auteurs [2] ont abouti à un polynôme de degré 49 pour représenter plus correctement le produit d'ordre 3 en fonction de la puissance d'entrée mais aucun n'approche les produits d'ordre 5 ou supérieurs.

Il est possible d'augmenter le nombre de termes ou d'utiliser en simulation un modèle basé sur une fraction de deux termes non analytiques, généralisation des fonctions rationnelles et du développement de Padé. L'utilisation d'un terme au dénominateur permet de modéliser correctement une saturation des produits d'intermodulation et une baisse de la pente à fort signal

sans générer des zéros à plus forte puissance. La pente en petit signal est donnée par le plus petit degré (non égal à 1) alors que la pente en fort signal est donnée par la différence des degrés les plus élevés du numérateur et du dénominateur.

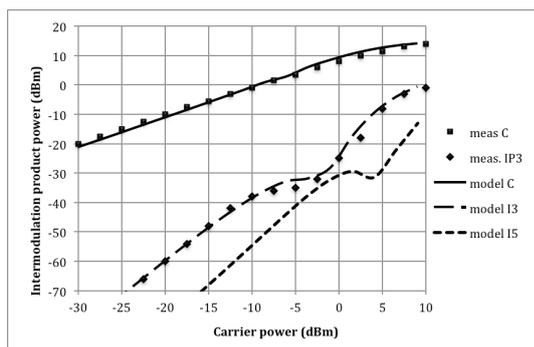


**Figure 6. PIM d'ordres 3 à 9 mesurés (points), et simulés par modèle basé sur une fraction non analytique (courbes noires).**

## 5. Application à des équipements actifs

Ces modèles non analytiques ne sont pas exclusivement applicables aux équipements passifs, ils peuvent aussi modéliser des équipements actifs dont les produits d'intermodulation s'écartent du comportement classique en petit signal.

Les amplificateurs à transistors mesurés et simulés par l'algorithme de balance harmonique dans les références [8, 9] ont des pentes en petit signal de 2,2 à 2,8 dB/dB suivant le point de polarisation. La modélisation par une fraction non analytique des pentes en petit signal et à saturation donne des résultats très proches des mesures et permet aussi d'obtenir le trou dans le produit d'intermodulation d'ordre 3 à la puissance d'entrée correcte.



**Figure 7. Porteuses et produits d'intermodulation d'ordre 3 mesurés [8, 9] (points), porteuses et produits d'ordre 3 et 5 du modèle non analytique (courbes).**

## 6. Conclusion

Les modèles non analytiques que nous avons proposés permettent de modéliser des dispositifs présentant des pentes de croissance des produits d'intermodulation qui ne peuvent être obtenues dans le cadre de la théorie classique.

Ils donnent des modèles simples, comportant un petit nombre de termes qui peuvent être définis à partir d'un nombre limité de mesures.

Ces modèles comportementaux peuvent ensuite prédire correctement les valeurs des produits dans une large gamme de mesure de puissances d'entrée ainsi que les valeurs des produits d'ordre supérieur et le NPR en multi porteuses.

## 7. Remerciements

Les travaux présentés ont été réalisés dans le cadre d'une action de R&T du CNES et font l'objet d'un brevet.

## 8. Bibliographie

- [1] Shitvov, A., Zelenchuk, D., Schunchinsky, A.: "Carrier-power dependence of passive intermodulation products in printed lines", 2009 Loughborough Antennas and Propagation Conference, 16-17 November 2009, Loughborough, UK, pp. 177-180
- [2] Henrie, J., Christianson, A., Chappell, W., A., "Prediction of passive intermodulation from coaxial connectors in microwave networks", IEEE Trans; on MTT, Vol 56, No 1, January 2008, pp. 209-216
- [3] Hartman, R.: "Passive intermodulation (PIM) testing moves to the base station", Microwave Journal, May 11, 2011
- [4] Westcott, R.J.: "Investigation of multiple FM/FDM carriers through a satellite TWT operating near to saturation", proc. IEE, vol 114, no 6, June 1967, pp 726-740
- [5] Blachman, N. M.: "Detectors, Bandpass nonlinearities and their optimization: inversion of the Chebyshev transform", IEEE Transactions on Information theory, IT-17, No. 4, July 1971, pp. 398-404
- [6] Blachman, N.: "Intermodulation in Terms of the Harmonic Output of a Nonlinearity", IEEE Trans on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Vol. ASSP-29, No. 6, December 1981, pp. 1202-1205
- [7] Saleh, A. M.: "Intermodulation analysis of FDMA satellite systems employing compensated and uncompensated TWT's", IEEE Trans. On Communications, Vol. COM-30, No. 5, May 1982, pp. 1233-1242
- [8] C. Fager, H. Zirath, "Prediction of power amplifier intermodulation distortion behavior", Gigahertz Conference 2003, Linkoping, 2003, pp 1-4
- [9] C. Fager, J. C. Pedro, N. Borges de Carvalho, H. Zirath, M. J. Rosario: "A comprehensive analysis of IMD behavior in RF CMOS power amplifiers", IEEE Journal of Solid-State Circuits, Vol. 36, No. 1, January 2004, pp. 24-34
- [10] J. Sombrin: "Non-analytic at the origin, behavioural models for active or passive non-linearity", International Journal of Microwaves and Wireless Technologies, 2013, en cours de publication, preview: [http://journals.cambridge.org/article\\_S1759078713000172](http://journals.cambridge.org/article_S1759078713000172)