

# Sur l'égalisation fréquentielle des modulations à phase continue

R. CHAYOT<sup>1</sup>, N. THOMAS<sup>2</sup>, C. POUILLIAT<sup>2</sup>, M.-L. BOUCHERET<sup>2</sup>

N. VAN WAMBEKE<sup>3</sup>, G. LESTHIEVENT<sup>4</sup>

<sup>1</sup>TéSA, Université de Toulouse/IRIT <sup>2</sup>INP-Toulouse/IRIT <sup>3</sup>Thales Alenia Space <sup>4</sup>Centre National d'Etudes Spatiales

<sup>1</sup> prenom.nom@tesa.prd.fr, <sup>2</sup> prenom.nom@enseeiht.fr

<sup>3</sup> prenom.nom@thalesaleniaspace.com, <sup>4</sup> prenom.nom@cnes.fr

**Résumé** – Dans cet article, nous proposons d'étudier différents algorithmes d'égalisation pour signaux à Modulation de Phase Continue (*continuous phase modulation*, CPM) dans le domaine fréquentiel à l'aide d'une représentation polyphase du signal. Par cette approche unifiée, nous montrons l'équivalence analytique de ces égaliseurs sous certaines hypothèses liées au canal de transmission, les liens, ainsi que leurs limitations dans certains cas.

**Abstract** – In this paper, we study different frequency-domain equalizers for CPM. To this end, we develop a general polyphase representation of continuous phase modulation signals (CPM). Based on this representation, we will show the equivalence of those equalizers under some given hypothesis concerning the channel, the links and also the limits in others cases.

## 1 Introduction

Les modulations à phase continue sont généralement connues pour leur bonne efficacité spectrales et leur enveloppe constante. Elles sont ainsi robustes aux non-linéarités introduites par les amplificateurs embarqués. Elles sont ainsi étudiées pour diverses applications, comme les communications tactiques, les communications aéronautiques par satellite, la télémesure ainsi que les communications Machine to Machine.

Depuis une dizaine d'années, plusieurs travaux ont étudié l'égalisation des signaux CPM dans les canaux sélectifs en fréquence. L'approche optimale, qui consiste à réaliser une détection de la séquence émise au sens du maximum de vraisemblance (*maximum likelihood*, ML) en considérant le canal de transmission et la modulation, est prohibitive en terme de complexité à cause de la mémoire combinée de la modulation du canal. Ainsi, l'égalisation du canal et la détection sont généralement traités séparément et en dehors du cas de modulation CPM binaire, l'architecture de l'égaliseur est plus complexe que celle pour une modulation linéaire sur canal sélectif en fréquence. L'approche utilisée dans [1], par exemple, égalise le signal dans le domaine fréquentiel et utilise la représentation de Rimoldi pour réaliser la détection [2]. Ces égaliseurs linéaires *Minimum Mean-Squared Error* (MMSE) ou itératifs reposent dans le domaine temporel et fréquentiel sur un modèle sur-échantillonné du canal dont les délais des trajets sont multiples du temps d'échantillonnage.

Pour réaliser l'égalisation dans le domaine fréquentiel du signal, la décomposition de Laurent [3] est souvent préférée car elle permet de représenter le signal comme une combinaison de signaux linéaires modulés en phase et amplitude. Dans le cas binaire, en ne considérant qu'une composante de Laurent, on revient au cas de l'égalisation de modulations linéaires classiques (à un traitement de pré-blanchiment près). Pour le cas

$M$ -aire ou le cas considérant toutes les composantes, l'architecture est quelque peu modifiée. Plusieurs travaux utilisent ainsi cette représentation. [4] présente plusieurs schémas d'égalisation (égaliseur linéaire MMSE, égalisation Block-Decision Feedback et turbo-égalisation MMSE) dans le domaine fréquentiel utilisant la décomposition de Laurent. [5] utilise une représentation polyphase du signal pour développer son égaliseur linéaire MMSE dans le domaine fréquentiel. Ces deux approches ont été développées pour une fréquence d'échantillonnage de deux échantillons par symbole émis. De manière différente, [6] introduit deux égaliseurs MMSE dans le domaine fréquentiel. Le premier utilise une représentation orthogonale développée à partir de la représentation de Rimoldi [2]. Le second égalise le signal après passage dans un banc de filtres adaptés à la décomposition de Laurent avec un échantillonnage au rythme symbole.

Dans cet article, nous proposons, dans un premier temps, un modèle polyphase généralisé pour les signaux CPM qui permet ainsi de travailler avec un nombre quelconque d'échantillons par symbole. Avec cette représentation, nous re-dérivons ensuite plusieurs égaliseurs de la littérature dans le domaine fréquentiel afin de mettre en exergue leurs similitudes et différences, et le passage à l'une et l'autre de ces structures. Enfin, des courbes de taux d'erreur binaire obtenues par simulation sont présentées.

## 2 Modulations à Phase Continue circulaires

Nous considérons une suite de  $N$  symboles pris dans l'alphabet  $M$ -aire  $\{\alpha_n\}_{0 \leq n \leq N-1} \in \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm M-1\}^N$ . L'enveloppe complexe  $s_b(t)$  associée au signal CPM est don-

née par

$$s_b(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T_s}} \exp(j\theta(t, \alpha)) \quad (1)$$

$$\text{avec } \theta(t, \alpha) = \pi h \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i q(t - iT_s) \quad (2)$$

$$\text{et } q(t) = \begin{cases} \int_0^t g(\tau) d\tau, & t \leq L_{\text{cpm}} \\ 1/2, & t > L_{\text{cpm}} \end{cases} \quad (3)$$

$E_s$  est l'énergie par symbole,  $T_s$  est la durée d'un symbole,  $\theta(t, \alpha)$  est la phase comprenant l'information,  $g(t)$  est la réponse en fréquence,  $h = k/p$  est l'indice de modulation avec  $k$  et  $p$  des entiers premiers entre eux et  $L_{\text{cpm}}$  est la mémoire de signal CPM.

Dans cet article, nous utilisons la décomposition de Laurent pour CPMs binaires [3], qui a été étendue par Mengali aux CPMs  $M$ -aires [7]. Cette décomposition permet de décrire le signal CPM comme une somme de  $P$  modulations PAM (*Pulse Amplitude Modulation*)  $\{l_p\}$  à pseudo-symboles complexes  $\{b_{p,n}\}$  :

$$s(t) = \sum_{p=0}^{P-1} \sum_{n=0}^{N_T-1} b_{p,n} l_p(t - nT_s) \quad (4)$$

Afin de travailler dans le domaine fréquentiel à l'aide d'opérateurs de type FFT (Fast Fourier Transform), la convolution par le canal doit être rendue circulaire (comme dans le cas linéaire classique). Cette opération peut être réalisée par l'utilisation d'un préfixe cyclique ou par l'introduction de séquences connues, appelées *Unique Word* (UW). Nous supposons l'emploi de cette dernière méthode. Ce choix se justifie par le fait que, malgré un débit utile plus faible, les UW peuvent être utilisés pour l'estimation de paramètres comme la fréquence et la phase initiale de la porteuse ou encore les paramètres du canal de transmission [8]. Il est important de mentionner que, du fait de la mémoire de la CPM, des symboles de terminaison doivent être ajoutés à la fin de la séquence de données pour assurer la continuité de la phase ainsi que l'unicité des UWs et que la taille des UW doit être supérieure à la longueur de la réponse impulsionnelle du canal.

### 3 Modèle polyphase des CPM circulaires

On notera  $\mathbf{F}_N$  la matrice de taille  $N \times N$  correspondant à une Transformée de Fourier Discrète de taille  $N$ .  $\mathbf{F}_{N,M}$  est une matrice diagonale de taille  $MN \times MN$  par bloc où chaque bloc est une matrice  $\mathbf{F}_N$ . La matrice  $\mathbf{I}_N$  est la matrice identité de taille  $N \times N$ . On définit une matrice circulante comme suit

$$[\hat{\mathbf{x}}]_{(n,m)} = [\mathbf{x}]_{(\text{mod}(n-m+1, N), 1)} \quad (5)$$

Les composantes polyphases d'un signal sont notées de la façon suivante pour une fréquence d'échantillonnage à  $kR_s$  où  $R_s$  est le débit symbole :

$$x_m^i = x(mT_s + \frac{i}{k}T_s) = x[km + i] \quad (6)$$

On considère une transmission à travers un canal sélectif en fréquence de réponse impulsionnelle

$$h_c(t) = \sum_{l=0}^{L_c-1} a_l \delta(t - \tau_l) \quad (7)$$

où  $a_l$  correspond à l'atténuation complexe du  $l^{\text{ième}}$  trajet,  $\tau_l$  à son délai et  $L_c$  au nombre de trajets. Après passage dans un filtre passe-bas idéal de réponse impulsionnelle  $\psi(t)$ , Le signal reçu est donné par :

$$r(t) = h * s(t) + w(t) \quad (8)$$

$$= \sum_m s(m \frac{T_s}{k}) h(t - m \frac{T_s}{k}) + w(t) \quad (9)$$

$w(t)$  est un bruit blanc Gaussien de densité spectrale  $N_0$  et  $h(t) = \psi * h_c(t)$ . On échantillonne le signal reçu à  $kR_s$ , ie à  $t = (kn + i) \frac{T_s}{k}$  avec  $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$  :

$$r_n^i \doteq r[kn + i] \quad (10)$$

$$= \sum_m s[m] h[kn + i - m] + \underbrace{w[kn + i]}_{\doteq w_n^i} \quad (11)$$

Ainsi, la  $i^{\text{me}}$  composante polyphase s'écrit :

$$r_n^i = \sum_{j=0}^{i-1} \sum_m s_m^j h_{n-m}^{i-j} + \sum_m s_m^i h_{n-m}^0 + \sum_{j=i+1}^{k-1} \sum_m s_m^j h_{n-m-1}^{k+i-j} + w_n^i \quad (12)$$

Le signal reçu peut alors s'écrire

$$\mathbf{r} = \mathbf{h} \mathbf{l} \mathbf{b} + \mathbf{w} \quad (13)$$

en définissant les vecteurs et matrices suivantes :

$$[\mathbf{l}_p^i]_{(n,m)} = l_{pn-m}^i, [\mathbf{h}^i]_{(n,m)} = h_{n-m}^i \text{ et } [\mathbf{h}]_{(n,m)}^i = h_{n-m-1}^i$$

$$\mathbf{h} \doteq \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{h}}^0 & \dot{\mathbf{h}}^{(k-1)'} & \dots & \dot{\mathbf{h}}^{1'} \\ \dot{\mathbf{h}}^1 & \dot{\mathbf{h}}^0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \dot{\mathbf{h}}^{(k-1)'} \\ \dot{\mathbf{h}}^{k-1} & \dots & \dot{\mathbf{h}}^1 & \dot{\mathbf{h}}^0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\mathbf{l} \doteq \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{l}}_0^0 & \dot{\mathbf{l}}_1^0 & \dots & \dot{\mathbf{l}}_{P-1}^0 \\ \dot{\mathbf{l}}_0^1 & \dot{\mathbf{l}}_1^1 & \dots & \dot{\mathbf{l}}_{P-1}^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dot{\mathbf{l}}_0^{k-1} & \dot{\mathbf{l}}_1^{k-1} & \dots & \dot{\mathbf{l}}_{P-1}^{k-1} \end{bmatrix} \quad (15)$$

Le vecteur  $\mathbf{b}$  correspond à un vecteur formé par les pseudo-symboles  $\{b_{p,n}\}$  et le vecteur  $\mathbf{w}$  correspond au bruit échantillonné. Notons que la matrice  $\mathbf{h}$  est une matrice de Toeplitz par bloc et chaque bloc est une matrice circulante. De même, les blocs de la matrice  $\mathbf{l}$  sont des matrices circulantes. Dans le cas particulier où  $k = 2$ , on retombe bien sur le système présenté dans [5]. Dans le domaine fréquentiel, nous pouvons

écrire le système suivant

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_{N,k} \mathbf{r} \quad (16)$$

$$= \underbrace{\mathbf{F}_{N,k} \mathbf{h} \mathbf{F}_{N,k}^H}_{\doteq \mathbf{H}} \underbrace{\mathbf{F}_{N,k} \mathbf{l} \mathbf{F}_{N,P}^H}_{\doteq \mathbf{L}} \underbrace{\mathbf{F}_{N,P} \mathbf{b}}_{\doteq \mathbf{B}} + \underbrace{\mathbf{F}_{N,k} \mathbf{w}}_{\doteq \mathbf{W}} \quad (17)$$

$$= \mathbf{H} \mathbf{L} \mathbf{B} + \mathbf{W} \quad (18)$$

Par propriété de la transformée de Fourier discrète, les blocs des matrices  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{L}$  sont diagonaux.

## 4 Méthodes d'égalisation fréquentielle

L'approche optimale consiste à traiter de manière conjointe l'égalisation du canal et la détection de la séquence binaire émise. Cependant, du fait de la nature non-linéaire des signaux CPM, la complexité de cette méthode est trop importante pour qu'elle puisse être envisagée. Un choix classique consiste à séparer l'égalisation de canal de la détection. C'est dans ce contexte que nous nous plaçons ici et notre étude se concentre uniquement sur les égaliseurs dans le domaine fréquentiel. Cette approche se justifie par la volonté d'obtenir une complexité qui ne dépend pas de la taille du canal de transmission. Après égalisation, on utilisera le détecteur par Maximum A Priori (MAP) développé dans [9].

### 4.1 Égalisation MMSE du canal

La première structure d'égaliseur MMSE consiste à ne considérer que l'égalisation de la composante canal donnée par  $\mathbf{H}$ . Ainsi, en posant  $\mathbf{S} \doteq \mathbf{L} \mathbf{B}$ , la matrice représentant l'égaliseur MMSE s'écrit comme suit :

$$\mathbf{G}_{\text{MMSE}} = \mathbf{R}_{\text{SS}} \mathbf{H}^H \mathbf{K}^{-1} \quad (19)$$

$$\text{avec } \mathbf{R}_{\text{SS}} = \mathbf{L} \mathbf{R}_{\text{BB}} \mathbf{L}^H \text{ et } \mathbf{K} = \mathbf{H} \mathbf{R}_{\text{SS}} \mathbf{H}^H + N_0 \mathbf{I}_{2N} \quad (20)$$

$\mathbf{R}_{\text{BB}}$  est la matrice d'auto-corrélation des pseudo-symboles de Laurent dans le domaine fréquentiel. On peut les calculer analytiquement selon la méthode donnée dans [3]. On peut l'étendre au cas  $M$ -aire. Il est à noter que pour une fréquence d'échantillonnage égale à  $2R_s$ , on retrouve l'égaliseur développé dans [5]. Après égalisation, le signal est filtré par les filtres adaptés aux composantes de Laurent. Cette opération correspond à multiplier le signal égalisé par  $\mathbf{L}^H$ .

### 4.2 Égalisation MMSE conjointe du canal et des composantes de Laurent

Dans [4], les auteurs égalisent conjointement le canal et les composantes de Laurent (chaque filtre de la décomposition est alors traité conjointement avec le canal). Il est important de mentionner que cet égaliseur est seulement prévu pour une fréquence d'échantillonnage égale à  $2R_s$ . Nous proposons ici d'étendre pour un nombre quelconque d'échantillons par symbole pour faire le lien avec la méthode précédente. Ainsi, après calcul et en utilisant la décomposition polyphase, cet égaliseur

MMSE s'écrit de la façon suivante :

$$\mathbf{D}_{\text{LE}} = \mathbf{R}_{\text{BB}} \mathbf{P}^H [\mathbf{P} \mathbf{R}_{\text{BB}} \mathbf{P}^H + N_0 \mathbf{I}_{2N}]^{-1} \quad (21)$$

$$\text{avec } \mathbf{P} = \mathbf{H} \mathbf{L} \quad (22)$$

Le principal désavantage de cet égaliseur est que les pseudo-symboles égalisés ne peuvent pas être utilisés dans les détecteurs par treillis conventionnels et l'on se doit d'utiliser le détecteur modifié introduit par Pincaldi. Cependant, il existe une méthode simple pour éviter ce désavantage. L'analogie avec le système précédent nous permet de montrer par calcul que le signal émis peut être reconstruit à partir du vecteur des pseudo-symboles égalisés  $\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{D}_{\text{LE}} \mathbf{R}$  de la manière suivante

$$\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{L} \tilde{\mathbf{B}}.$$

Remarquons alors que

$$\mathbf{L} \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{L} \mathbf{D}_{\text{LE}} \mathbf{R} \quad (23)$$

$$= \mathbf{G}_{\text{MMSE}} \mathbf{R} \quad (24)$$

Ainsi, en reconstruisant le signal pour le donner à un détecteur conventionnel, on remarque que l'égaliseur proposé par [4] devient équivalent à l'égaliseur développé dans la section précédente.

### 4.3 Égalisation au temps symbole de Tan [6]

Dans [6], un égaliseur fonctionnant au temps symbole est développé. A l'image des modulations linéaires, ils égalisent les sorties du banc de filtres adaptés aux composantes de Laurent. Ainsi, le signal reçu filtré par le banc de filtres adaptés aux composantes de Laurent s'écrit :

$$\mathbf{r}_f = \mathbf{l}^H \mathbf{r} \quad (25)$$

$$= \mathbf{l}^H \mathbf{h} \mathbf{l} \mathbf{b} + \underbrace{\mathbf{l}^H \mathbf{w}}_{\doteq \tilde{\mathbf{w}}} \quad (26)$$

Ainsi, le signal reçu filtré dans le domaine fréquentiel s'écrit :

$$\mathbf{R}_f = \mathbf{L}^H \mathbf{H} \mathbf{L} \mathbf{B} + \tilde{\mathbf{W}} \quad (27)$$

On peut alors remarquer que le signal filtré par le filtre adapté à la  $k^{\text{ième}}$  composante de Laurent peut s'écrire comme

$$\begin{aligned} [\mathbf{R}_f]_k &= \sum_{j=0}^{P-1} \left( \mathbf{L}_k^{0H} (\mathbf{L}_j^{0H} \mathbf{H}^0 + \mathbf{L}_j^1 \mathbf{H}^{1'}) \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{L}_k^{1H} (\mathbf{L}_j^0 \mathbf{H}^1 + \mathbf{L}_j^1 \mathbf{H}^0) \right) \mathbf{B}_j \end{aligned} \quad (28)$$

Dans leurs hypothèses de travail, les auteurs ne considèrent que des canaux dont les retards sont des multiples de  $T_s$ . Ainsi,  $\mathbf{h}^1 = \mathbf{h}^{1'} = \mathbf{0}$ . Notre système s'écrit alors comme

$$[\mathbf{R}_f]_k = \sum_{j=0}^{P-1} \left( \mathbf{L}_k^{0H} \mathbf{L}_j^0 \mathbf{H}^0 + \mathbf{L}_k^{1H} \mathbf{L}_j^1 \mathbf{H}^0 \right) \mathbf{B}_j \quad (29)$$

$$= \mathbf{H}^0 \sum_{j=0}^{P-1} \left( \mathbf{L}_k^{0H} \mathbf{L}_j^0 + \mathbf{L}_k^{1H} \mathbf{L}_j^1 \right) \mathbf{B}_j \quad (30)$$

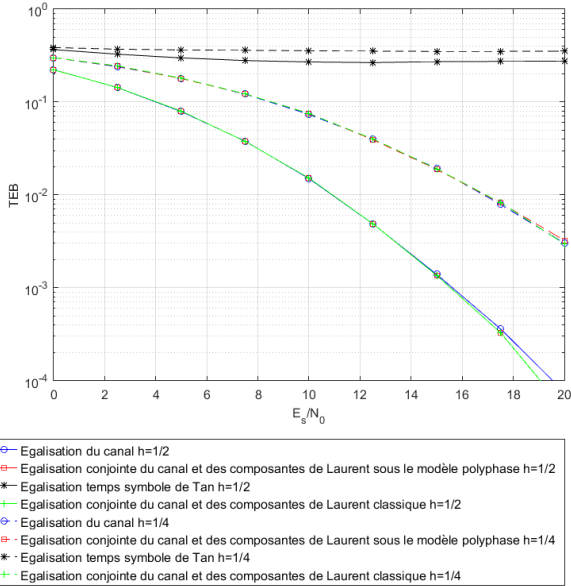


FIG. 1: *TEB pour canal multi-trajets avec délais multiples de  $T_s/2$*

$$\mathbf{R} = \text{diag}(\mathbf{H}^0) \mathbf{L}^H \mathbf{L} \mathbf{B} + \widetilde{\mathbf{W}} \quad (31)$$

On retrouve bien alors le système proposé dans [6]; notre modèle généralise bien les hypothèses des égaliseurs présents dans la littérature. Ainsi dans [6], le  $k^{\text{ième}}$  coefficient de l'égaliseur MMSE correspondant au  $p^{\text{ième}}$  filtre adapté et incorporant un filtre blanchissant s'écrit comme :

$$W_{k,p} = \frac{\mathbf{H}[k]^*}{|\mathbf{H}[k]|^2 + N_0 C(p,p;k)} \quad (32)$$

La fonction  $C(p,p;k)$  correspond à la fonction d'inter-corrélation des pseudo-symboles. Il est important de noter que ce modèle ne tient plus lorsqu'un des retards n'est plus multiple de  $T_s$  puisque des termes d'interférence liés à la seconde composante polyphase du canal ne sont pas pris en compte.

## 5 Simulations

La Fig 1 trace le taux d'erreur binaire (TEB) obtenu en fonction de  $E_s/N_0$  pour deux CPM avec  $L_{\text{cpm}} = 3$ , une réponse en fréquence  $g(t)$  en cosinus surélevé et  $h=1/2$  ou  $h=1/4$ . Le bloc CPM fait une taille de 512 symboles dont 16 composent l'UW. On considère une transmission à travers le canal 1 proposé dans [6]. Cependant, au lieu de considérer des délais multiples de  $T_s$ , on les prend multiple de  $T_s/2$ .

On remarque alors que l'égaliseur au temps symbole de Tan et Stüber présente un plancher d'erreur dû à la non-prise en compte totale des interférences comme expliqué dans la section 4.3. Les égaliseurs MMSE du canal et MMSE conjoint du canal et des composantes de Laurent (quelque soit son implémentation: sous le modèle polyphase ou classique selon [4])

présentent les mêmes performances comme annoncées de façon analytique pour les deux CPMs considérées.

## 6 Conclusion

Dans cet article, nous avons proposé une représentation polyphase généralisée des signaux CPM circulaires. Ainsi, nous avons pu étendre et étudier différents égaliseurs linéaires dans le domaine fréquentiel issus de la littérature. Nous avons démontré que l'égaliseur du canal et l'égaliseur conjoint du canal et des composantes de Laurent sont similaires tandis que l'égalisation au temps symboles est limitée par l'hypothèse forte d'un canal au temps symboles. Dans de futurs travaux, nous considérerons l'extension au cas itératif de cette approche d'égalisation.

## Références

- [1] B. Ozgul, M. Koca, and H. Deliç, "Double turbo equalization of continuous phase modulation with frequency domain processing," *IEEE Tr. on Comm.*, vol. 57, no. 2, pp. 423–429, 2009.
- [2] B. E. Rimoldi, "A decomposition approach to cpm," *IEEE Tr. Inf. Theory*, vol. 34, no. 2, pp. 260–270, 1988.
- [3] P. Laurent, "Exact and approximate construction of digital phase modulations by superposition of amplitude modulated pulses (amp)," *IEEE Tr. on Comm.*, vol. 34, pp. 150–160, Feb 1986.
- [4] F. Panchaldi and G. M. Vitetta, "Equalization algorithms in the frequency domain for continuous phase modulations," *IEEE Tr. on Comm.*, vol. 54, no. 4, pp. 648–658, 2006.
- [5] W. Van Thillo, F. Horlin, J. Nsenga, V. Ramon, A. Bourdoux, and R. Lauwereins, "Low-complexity linear frequency domain equalization for continuous phase modulation," *IEEE Tr. Wir. Comm.*, vol. 8, no. 3, pp. 1435–1445, 2009.
- [6] J. Tan and G. L. Stuber, "Frequency-domain equalization for continuous phase modulation," in *IEEE Tr. Wir. Comm.*, vol. 4, pp. 2479–2490, 2005.
- [7] U. Mengali and M. Morelli, "Decomposition of m-ary cpm signals into pam waveforms," *IEEE Tr. on Inf. Theory*, vol. 41, no. 5, pp. 1265–1275, 1995.
- [8] W. V. Thillo, V. Ramon, A. Bourdoux, F. Horlin, K. Sleurs, and R. Lauwereins, "Training sequence versus cyclic prefix for cpm with frequency domain equalization," in *IEEE GLOBECOM*, pp. 1–5, Nov 2009.
- [9] G. Colavolpe and A. Barbieri, "Simplified iterative detection of serially concatenated cpm signals," vol. 3, Nov 2005.