

Le problème de flot insécable : application à la gestion des ressources d'une constellation de satellites

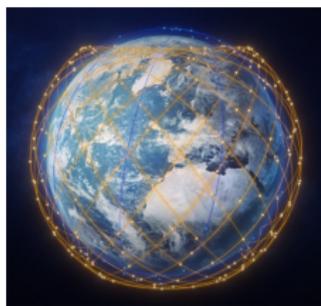
François Lamothe

31 janvier 2022

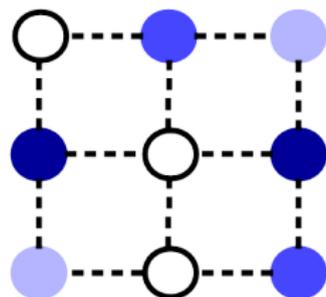
E. Rachelson, A. Haït, C. Baudoin, M. Gineste, J.B. Dupé et T. Deleu



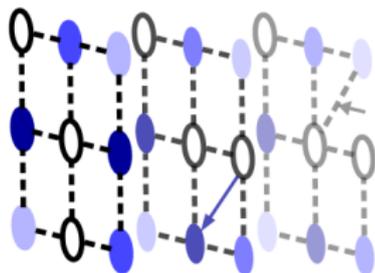
Plan de la présentation



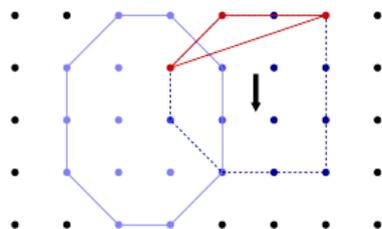
1. Une constellation de satellites



2. Flots insécables et arrondi aléatoire



3. Flots insécables dynamiques

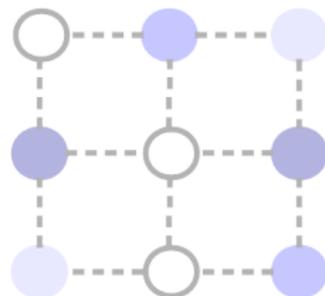


4. Méthodes de décomposition

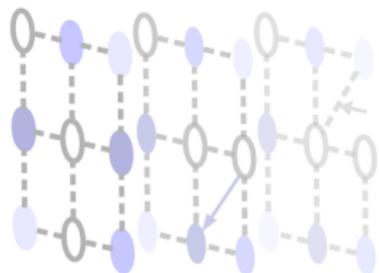
Plan de la présentation



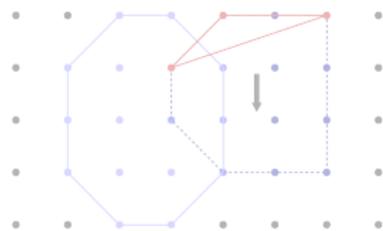
1. Une constellation de satellites



2. Flots insécables et arrondi aléatoire



3. Flots insécables dynamiques



4. Méthodes de décomposition

Une constellation de satellites

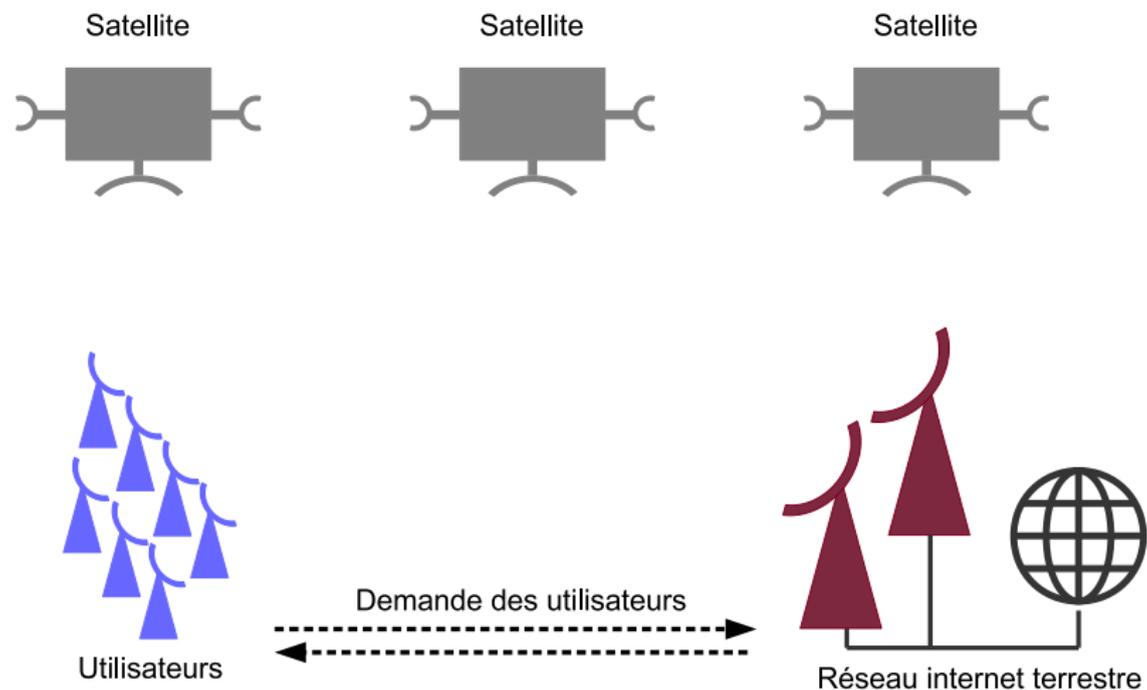


La constellation Telesat

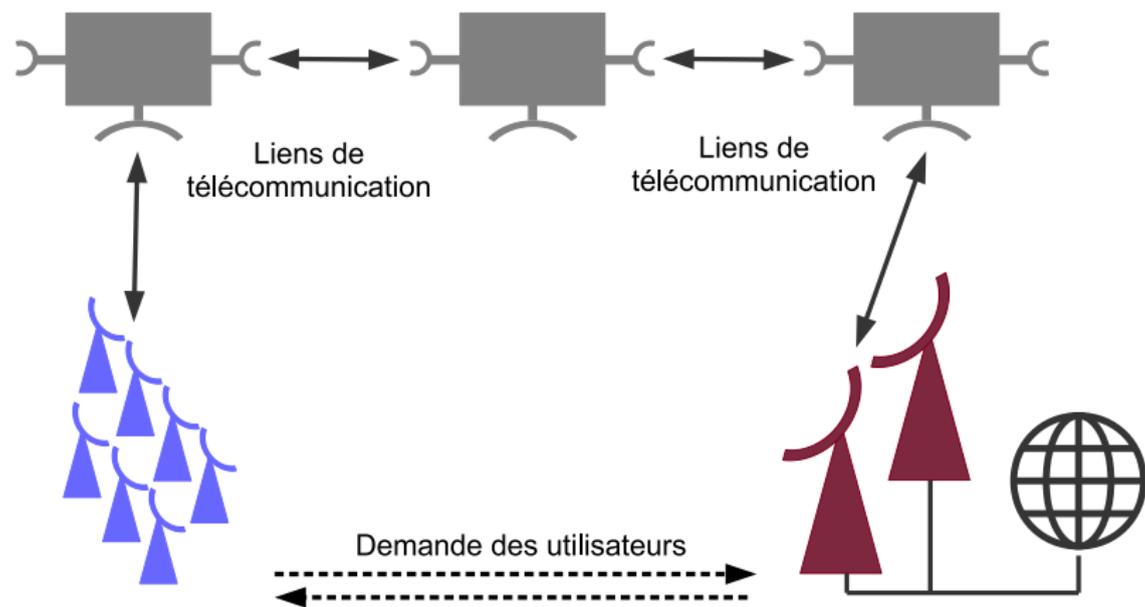
Objectifs :

- Connecter des utilisateurs à internet
- Complémenter le réseau terrestre
- Zones faiblement peuplées
- Océans (avions, bateaux ...)

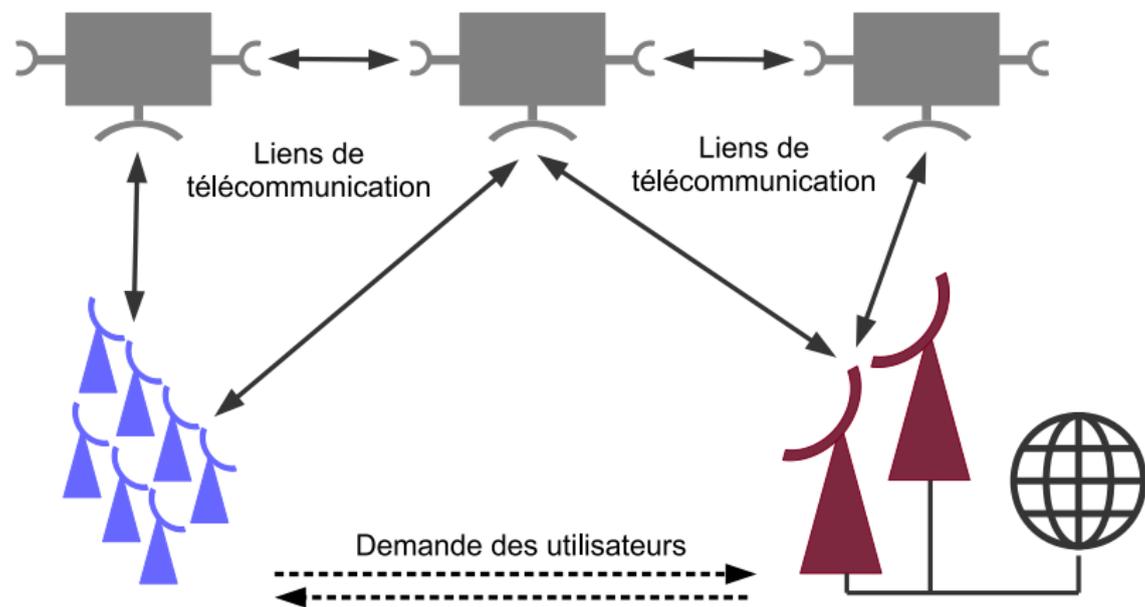
Une constellation de satellites



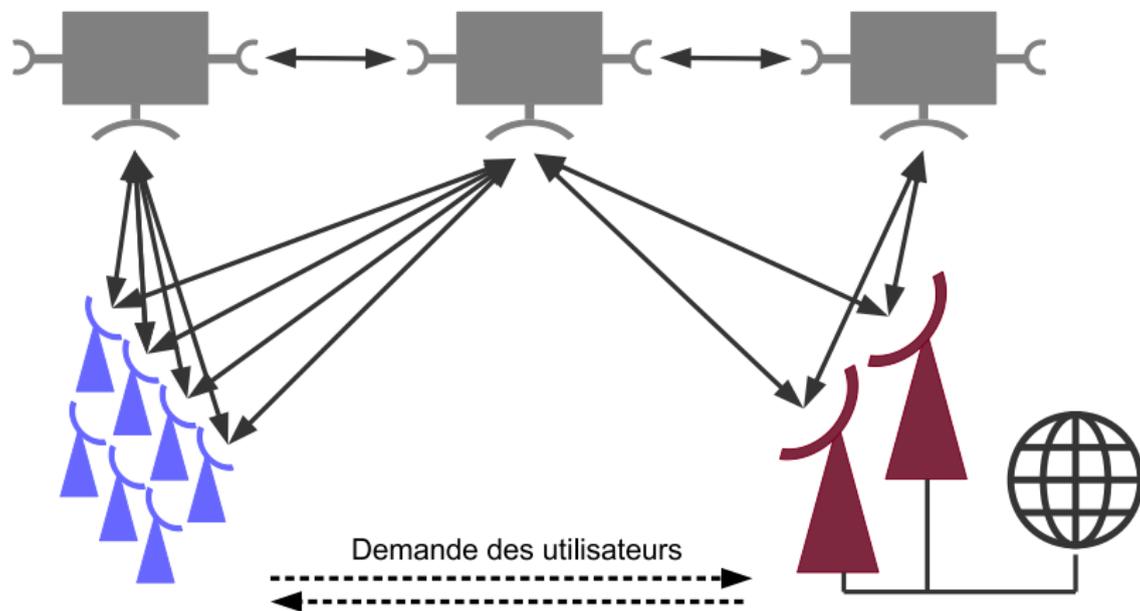
Une constellation de satellites



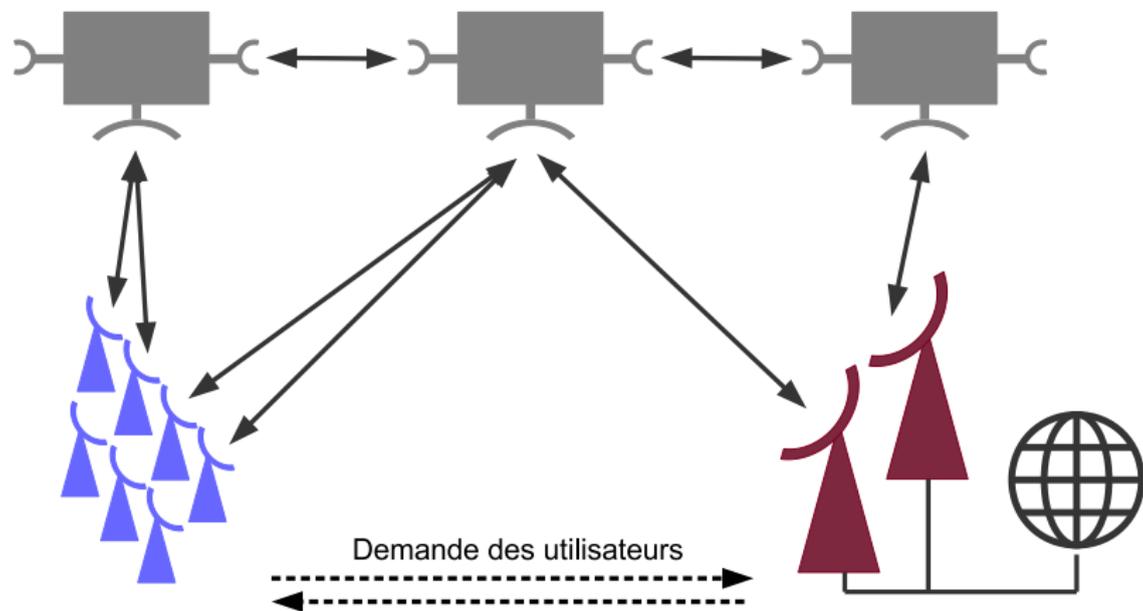
Une constellation de satellites



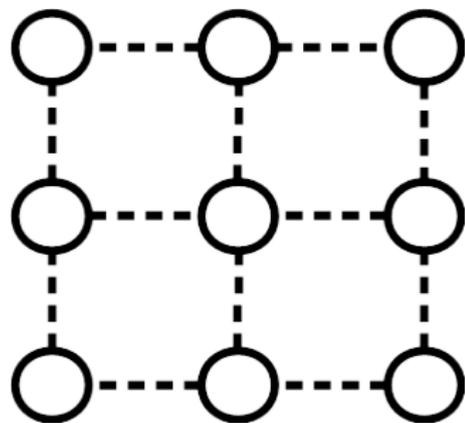
Une constellation de satellites



Une constellation de satellites

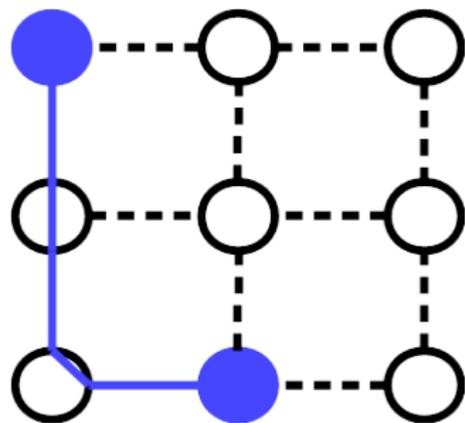


Une constellation de satellites



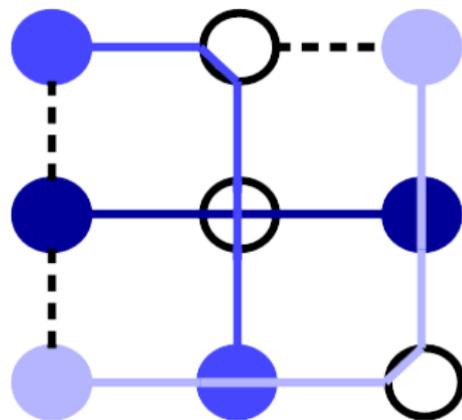
Le problème de transmission de flux

Une constellation de satellites



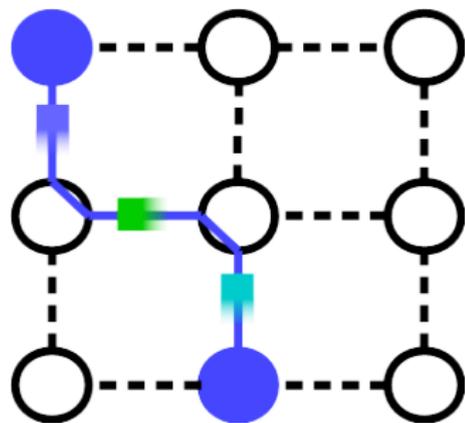
Le problème de transmission de flux

Une constellation de satellites



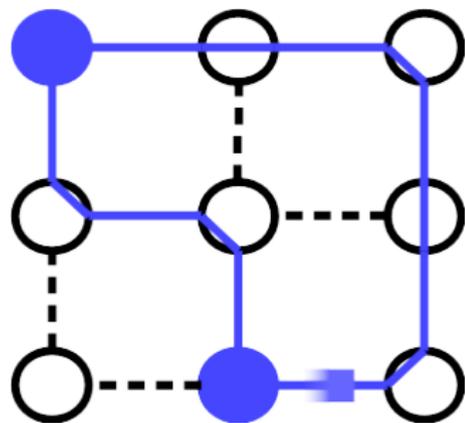
Le problème de transmission de flux

Une constellation de satellites



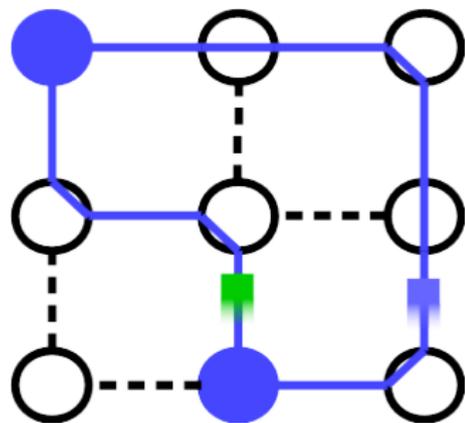
Ordre des paquets important → un seul chemin par utilisateur

Une constellation de satellites



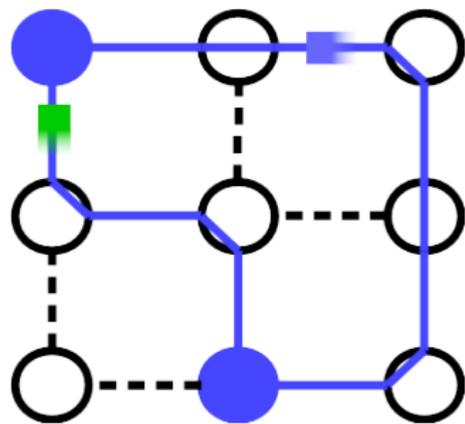
Ordre des paquets important \rightarrow un seul chemin par utilisateur

Une constellation de satellites



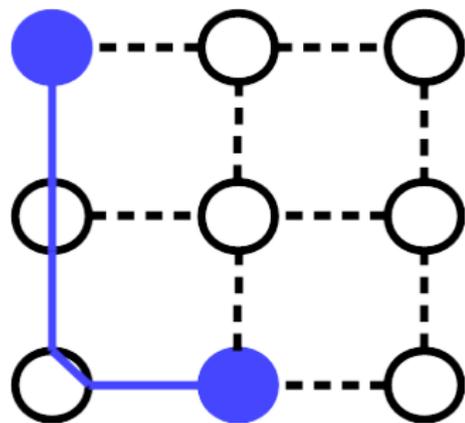
Ordre des paquets important \rightarrow un seul chemin par utilisateur

Une constellation de satellites



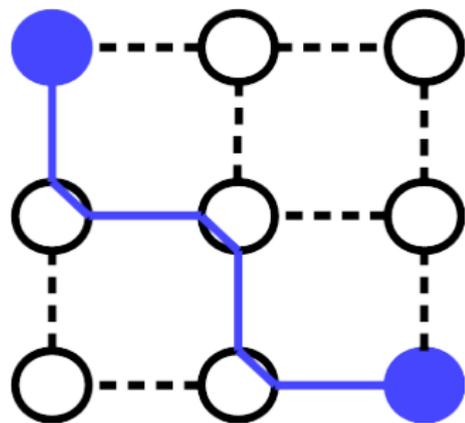
Ordre des paquets important \rightarrow un seul chemin par utilisateur

Une constellation de satellites



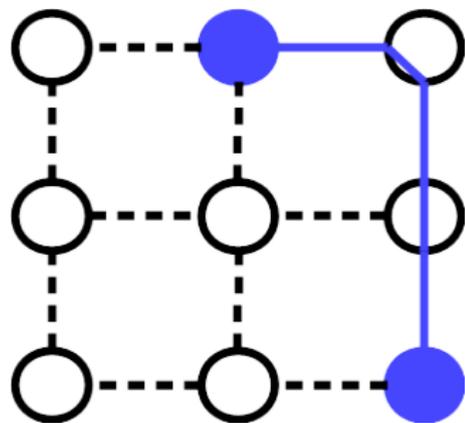
Impact du défilement de la constellation sur la transmission

Une constellation de satellites



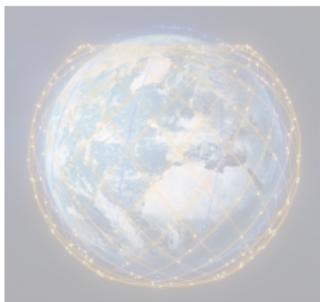
Impact du défilement de la constellation sur la transmission

Une constellation de satellites

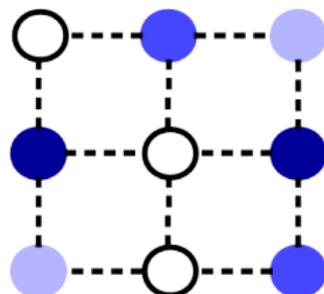


Impact du défilement de la constellation sur la transmission

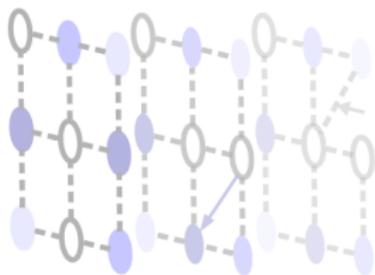
Plan de la présentation



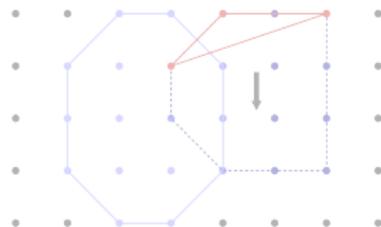
1. Une constellation de satellites



2. Flots insécables et arrondi aléatoire



3. Flots insécables dynamiques



4. Méthodes de décomposition

Flots insécables

Satellites

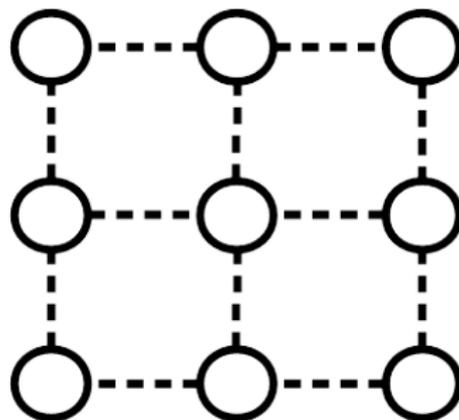
Liens de télécommunication



Noeuds



Arcs

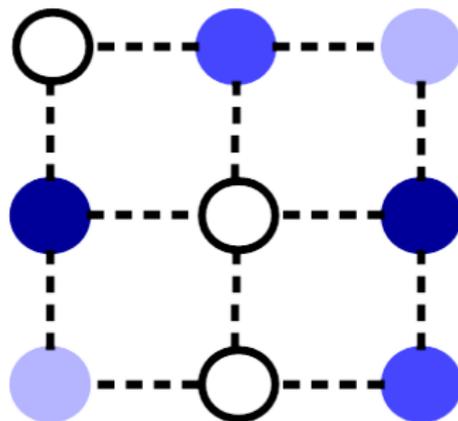


Flots insécables

Débit internet des utilisateurs →

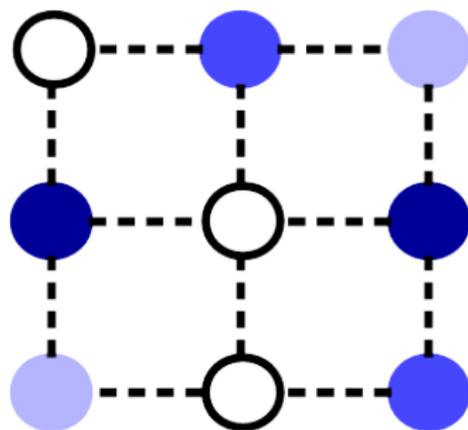


Commodités à transmettre

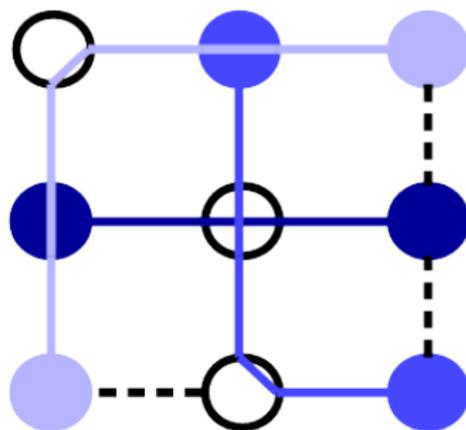


Objectifs :

- Un seul chemin par commodité
- Minimiser les dépassements de capacité

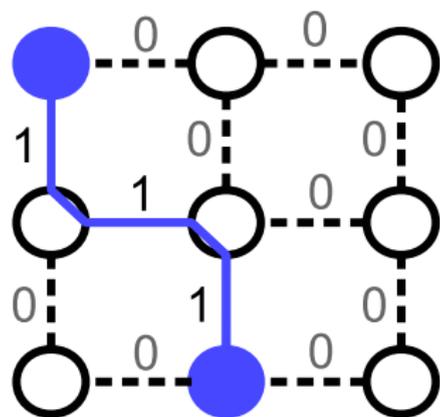


Données

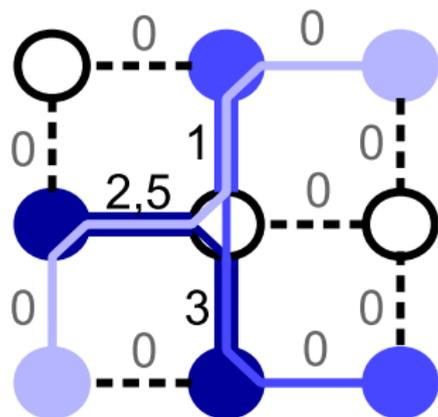


Solution

Modélisation des flots insécables



f_{ek} : passage du flot



Δ_e : dépassements de capacité

Modélisation des flots insécables

f_{ek} : passage du flot

Δ_e : dépassements de capacité

$$\min_{\substack{f_{ek} \in \{0,1\} \\ \Delta_e \in \mathbb{R}^+}} \sum_{e \in E} \Delta_e$$

tel que

$$\sum_{e \in E^+(v)} f_{ek} - \sum_{e \in E^-(v)} f_{ek} = \delta_v^{o_k} - \delta_v^{d_k}$$

$$\sum_{k \in K} f_{ek} D_k \leq c_e + \Delta_e$$

Minimisation des
dépassements de capacité

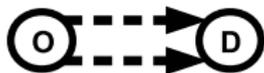
Contraintes de flot

Contraintes de capacité

- Flots insécables : problème NP-complet
- Raghavan et Thompson (1987) : *Randomized Rounding*
- Extension proposée : *Sequential Randomized Rounding*

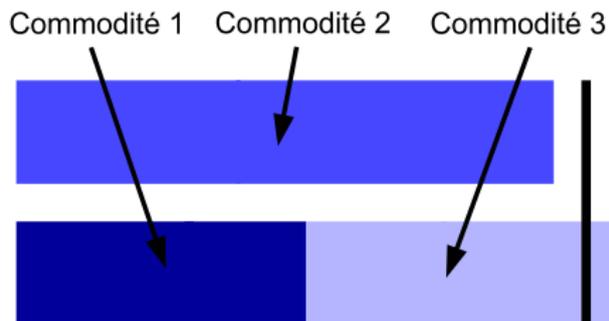
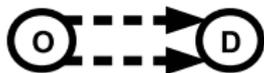
Arrondi aléatoire

- Flots insécables : problème NP-complet
- Raghavan et Thompson (1987) : *Randomized Rounding*
- Extension proposée : *Sequential Randomized Rounding*

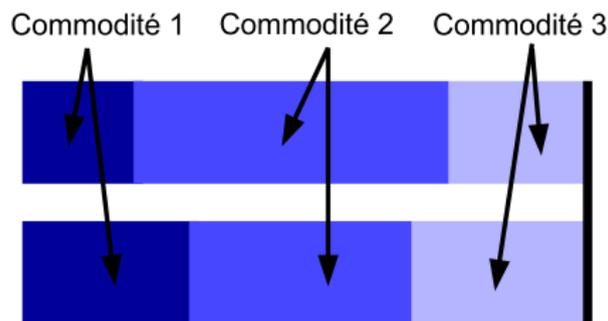


Arrondi aléatoire

- Flots insécables : problème NP-complet
- Raghavan et Thompson (1987) : *Randomized Rounding*
- Extension proposée : *Sequential Randomized Rounding*

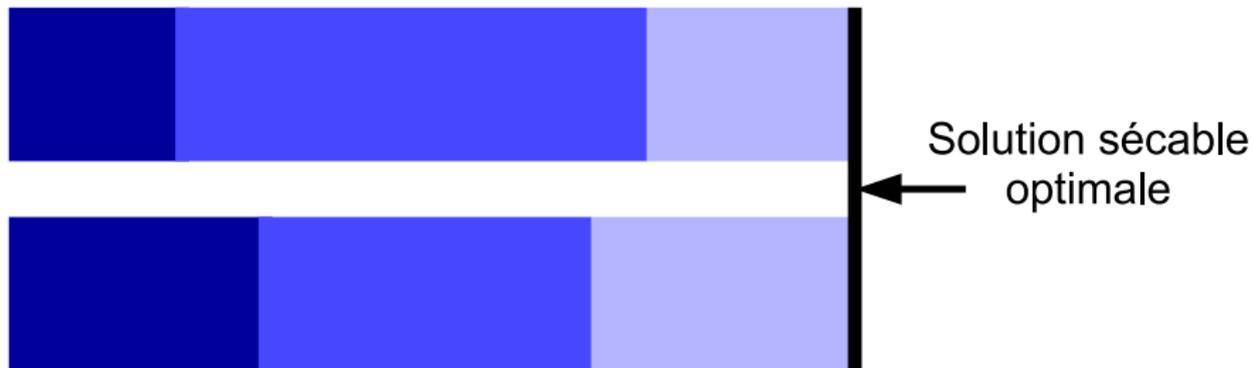


Solution insécable optimale :
difficile à obtenir



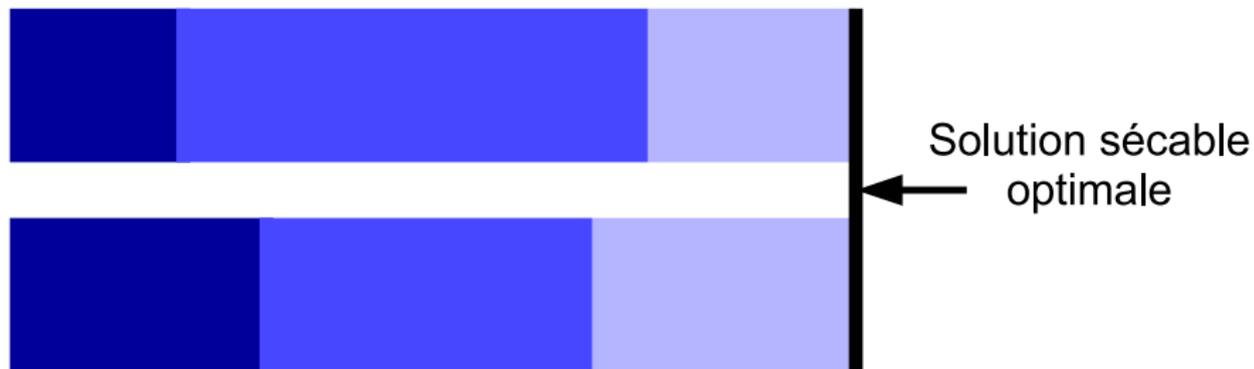
Solution sécable optimale :
facile à obtenir

- Calcul d'une solution sécable



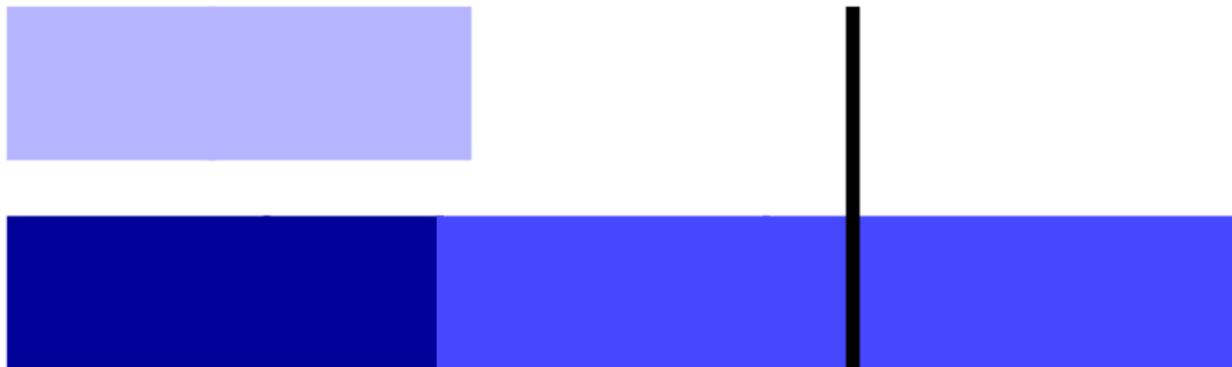
Arrondi aléatoire

- Calcul d'une solution sécable
- Pour chaque commodité indépendamment :
 - Choisir un chemin par arrondi aléatoire



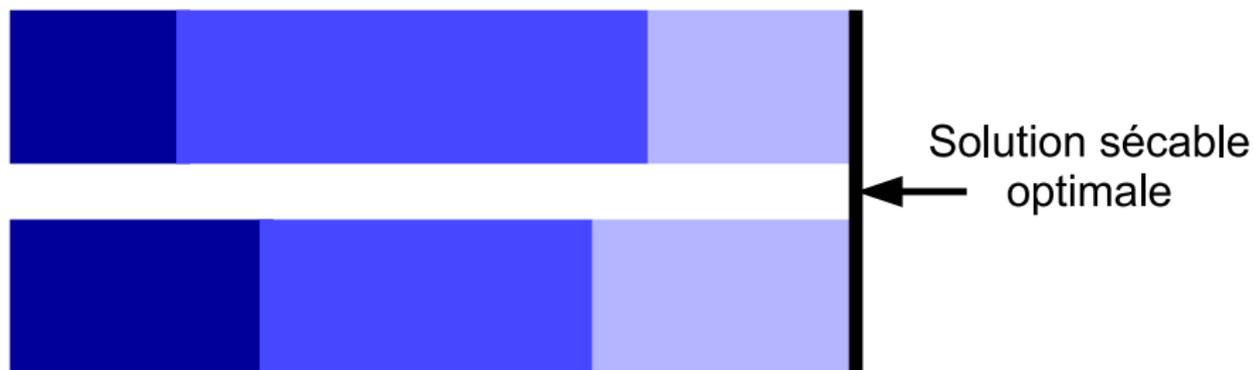
Arrondi aléatoire

- Calcul d'une solution sécable
- Pour chaque commodité indépendamment :
 - Choisir un chemin par arrondi aléatoire



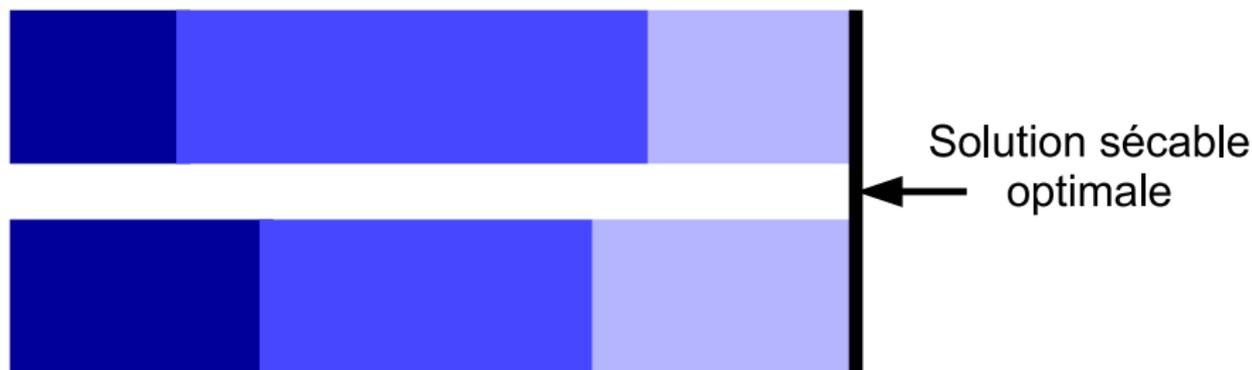
Arrondi aléatoire séquentiel

- Calcul d'une solution sécable



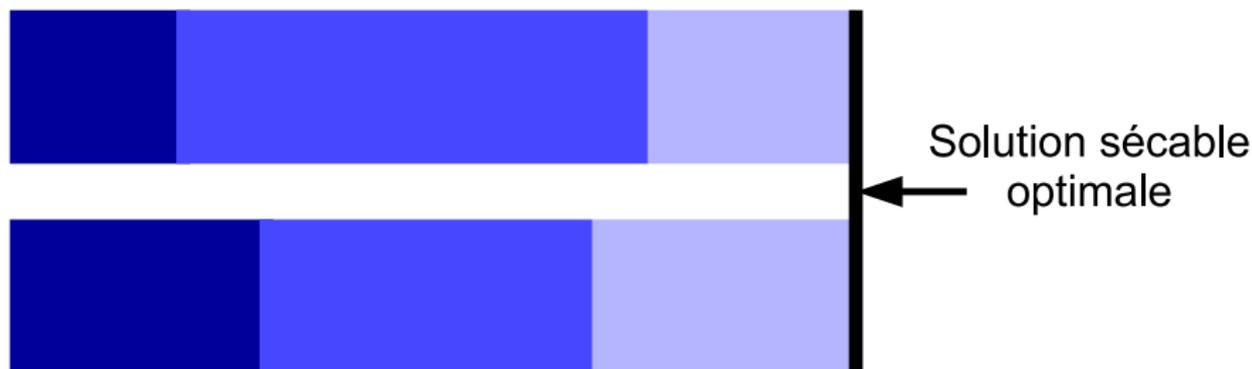
Arrondi aléatoire séquentiel

- Calcul d'une solution sécable
- Alternance entre deux types d'actions :
 - Choisir le chemin d'une commodité par arrondi aléatoire
 - Actualiser la solution sécable



Arrondi aléatoire séquentiel

- Calcul d'une solution sécable
- Alternance entre deux types d'actions :
 - Choisir le chemin d'une commodité par arrondi aléatoire
 - Actualiser la solution sécable
- Fixer les commodités de plus grosse demande en premier



Arrondi aléatoire séquentiel

- Calcul d'une solution sécable
- Alternance entre deux types d'actions :
 - Choisir le chemin d'une commodité par arrondi aléatoire
 - Actualiser la solution sécable
- Fixer les commodités de plus grosse demande en premier



Arrondi aléatoire séquentiel

- Calcul d'une solution sécable
- Alternance entre deux types d'actions :
 - Choisir le chemin d'une commodité par arrondi aléatoire
 - Actualiser la solution sécable
- Fixer les commodités de plus grosse demande en premier



Arrondi aléatoire séquentiel

- Calcul d'une solution sécable
- Alternance entre deux types d'actions :
 - Choisir le chemin d'une commodité par arrondi aléatoire
 - Actualiser la solution sécable
- Fixer les commodités de plus grosse demande en premier



Arrondi aléatoire séquentiel

- Calcul d'une solution sécable
- Alternance entre deux types d'actions :
 - Choisir le chemin d'une commodité par arrondi aléatoire
 - Actualiser la solution sécable
- Fixer les commodités de plus grosse demande en premier



Arrondi aléatoire séquentiel

- Calcul d'une solution sécable
- Alternance entre deux types d'actions :
 - Choisir le chemin d'une commodité par arrondi aléatoire
 - Actualiser la solution sécable
- Fixer les commodités de plus grosse demande en premier



Résultats numériques

- Instances académiques : 30 à 200 noeuds
- Solutions de meilleure qualité : dépassement de capacité $\div 5$ à $\div 20$
- Temps de calcul $\times 3$

Résultats numériques

- Instances académiques : 30 à 200 noeuds
- Solutions de meilleure qualité : dépassement de capacité $\div 5$ à $\div 20$
- Temps de calcul $\times 3$

Résolution des instances Télésat

- 400 satellites
- 2000 liens de communication



Arrondi aléatoire séquentiel

Résultats numériques

- Instances académiques : 30 à 200 noeuds
- Solutions de meilleure qualité : dépassement de capacité $\div 5$ à $\div 20$
- Temps de calcul $\times 3$

Résolution des instances Télésat

- 400 satellites
- 2000 liens de communication



Garanties théoriques

- Similaires à l'arrondi aléatoire simple
- Facteur d'approximation optimal $O\left(\frac{\log m}{\log \log m}\right)$

Résultats numériques

- Instances académiques : 30 à 200 noeuds
- Solutions de meilleure qualité : dépassement de capacité $\div 5$ à $\div 20$
- Temps de calcul $\times 3$

Résolution des instances Télésat

- 400 satellites
- 2000 liens de communication



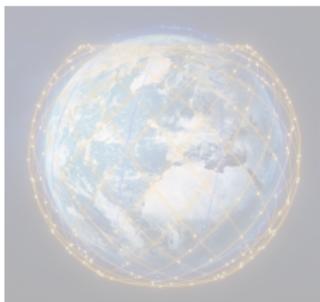
Garanties théoriques

- Similaires à l'arrondi aléatoire simple
- Facteur d'approximation optimal $O\left(\frac{\log m}{\log \log m}\right)$

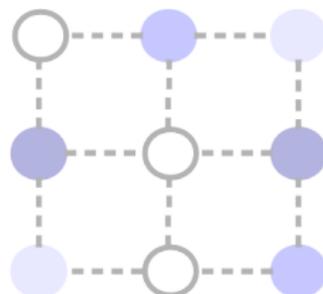


Lamothe et al. Randomized rounding algorithms for large scale unsplittable flow problems. *Journal of Heuristics* **27**, 1081–1110, 2021.

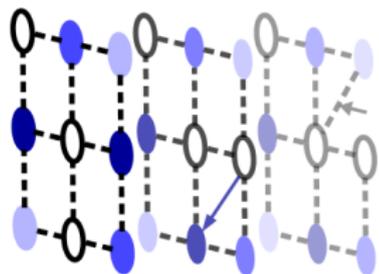
Plan de la présentation



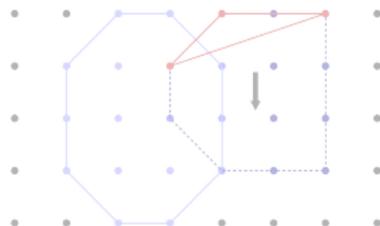
1. Une constellation de satellites



2. Flots insécables et arrondi aléatoire



3. Flots insécables dynamiques



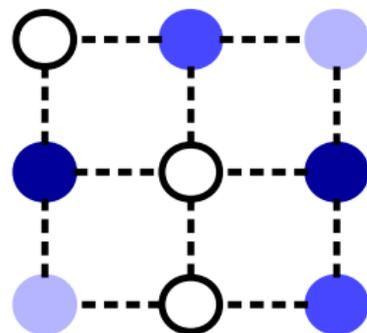
4. Méthodes de décomposition

Nouvelles difficultés :

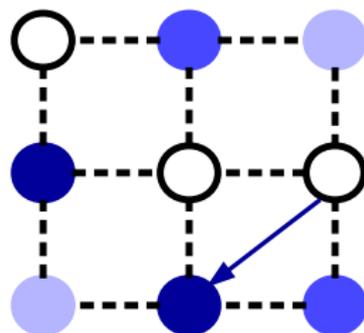
- Rotation de la constellation
- Visibilité des satellites

Nouvelles difficultés :

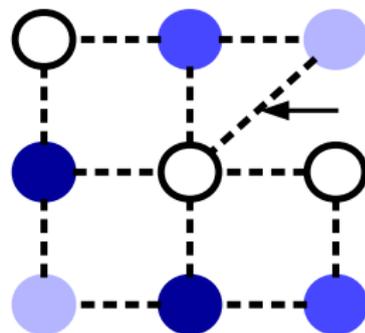
- Rotation de la constellation
- Visibilité des satellites



Pas de temps 1



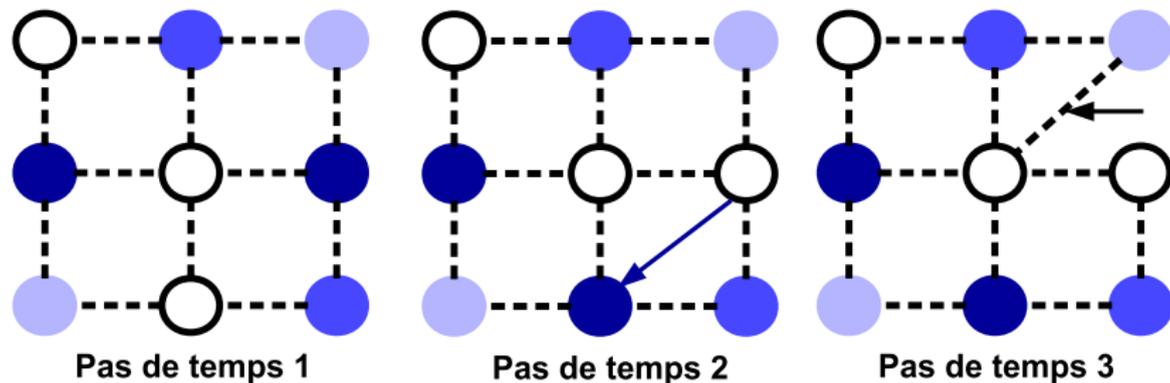
Pas de temps 2



Pas de temps 3

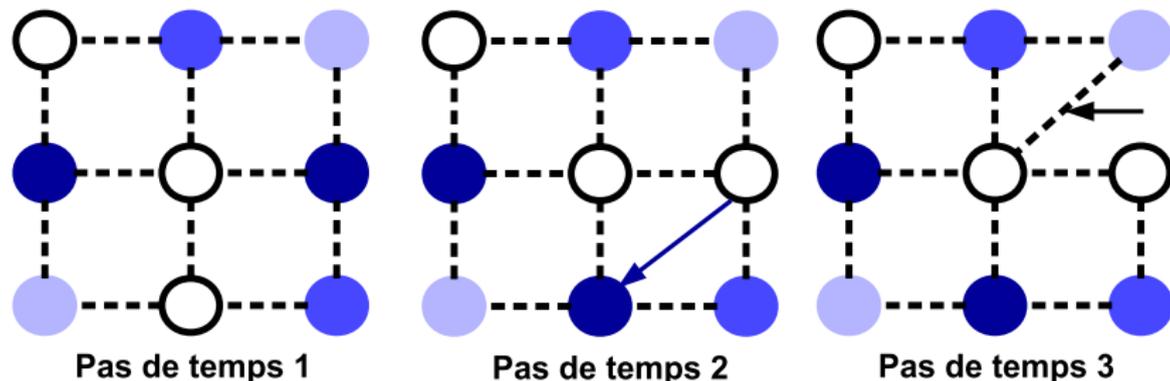
Objectifs :

- Un seul chemin par commodité
- Minimiser les dépassements de capacité



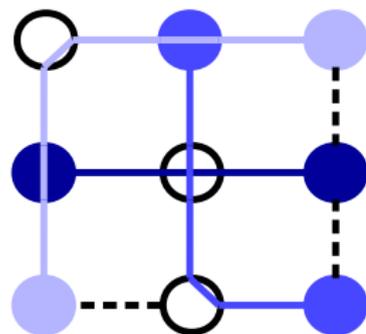
Objectifs :

- Un seul chemin par commodité
- Minimiser les dépassements de capacité
- Minimiser les changements de chemin

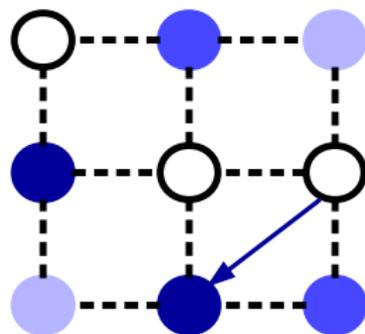


Objectifs :

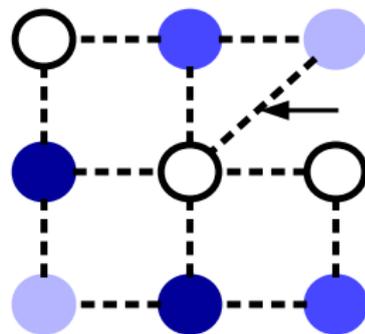
- Un seul chemin par commodité
- Minimiser les dépassements de capacité
- Minimiser les changements de chemin



Pas de temps 1



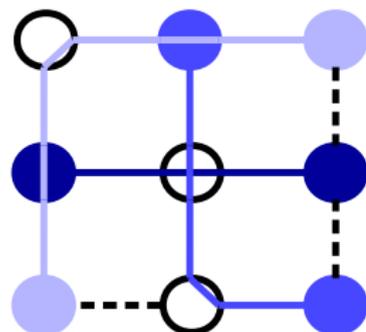
Pas de temps 2



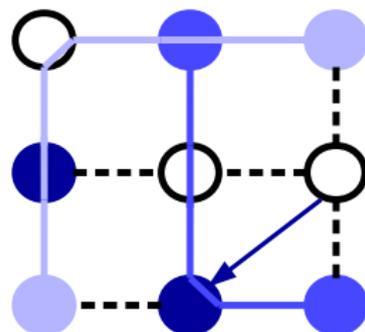
Pas de temps 3

Objectifs :

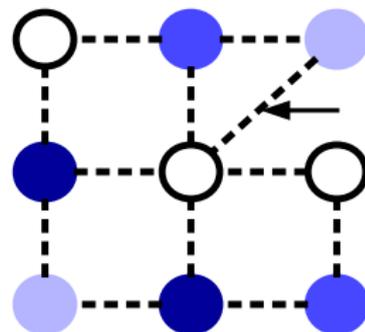
- Un seul chemin par commodité
- Minimiser les dépassements de capacité
- Minimiser les changements de chemin



Pas de temps 1



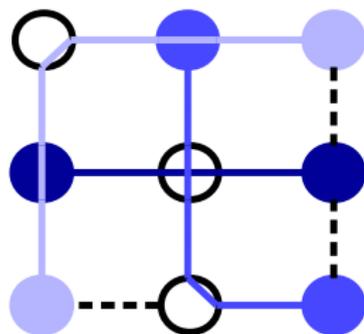
Pas de temps 2



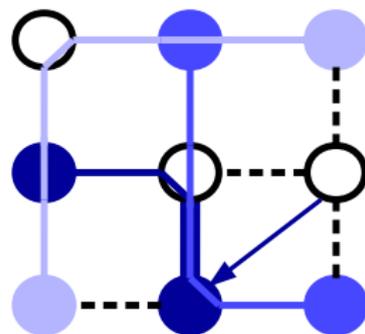
Pas de temps 3

Objectifs :

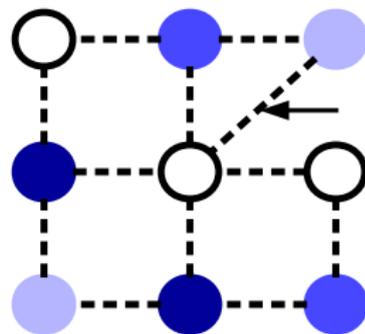
- Un seul chemin par commodité
- Minimiser les dépassements de capacité
- Minimiser les changements de chemin



Pas de temps 1



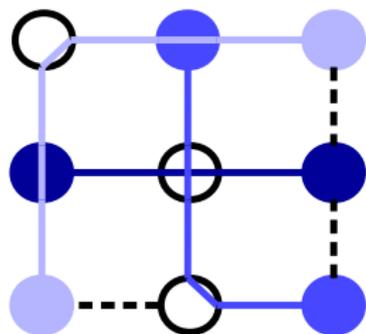
Pas de temps 2



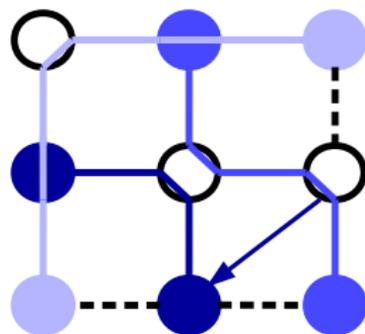
Pas de temps 3

Objectifs :

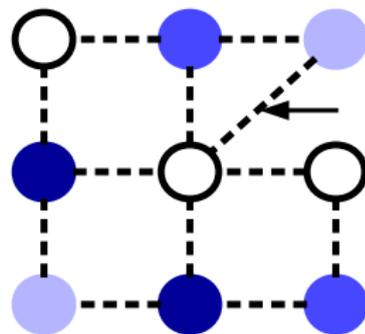
- Un seul chemin par commodité
- Minimiser les dépassements de capacité
- Minimiser les changements de chemin



Pas de temps 1



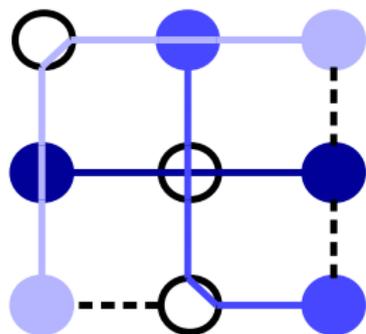
Pas de temps 2



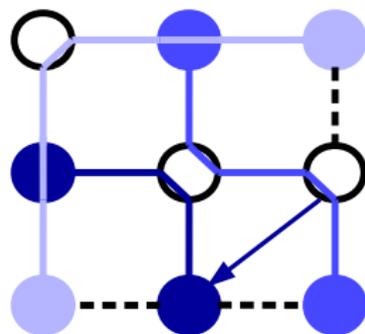
Pas de temps 3

Objectifs :

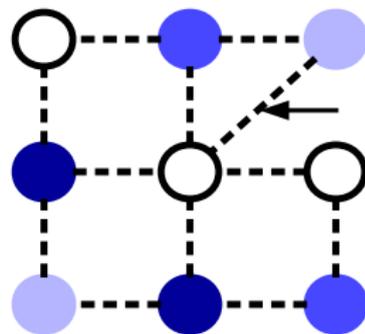
- Un seul chemin par commodité
- Minimiser les dépassements de capacité
- Minimiser les changements de chemin
- Marge de dépassement non pénalisé



Pas de temps 1



Pas de temps 2



Pas de temps 3

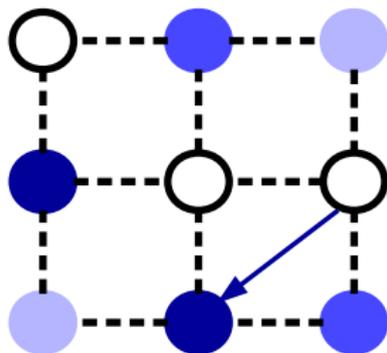
Résolution similaire au problème statique :

- Calcul d'une solution sécable
- Arrondi aléatoire pour obtenir une solution insécable

Résolution similaire au problème statique :

- Calcul d'une solution sécable
- Arrondi aléatoire pour obtenir une solution insécable

Méthodes considérant un seul pas de temps

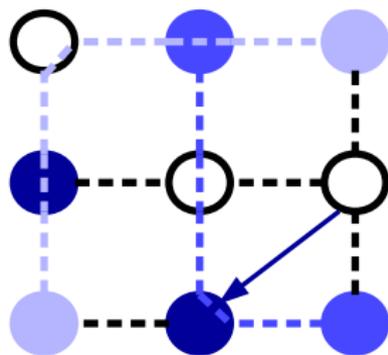


Pas de temps courant

Résolution similaire au problème statique :

- Calcul d'une solution sécable
- Arrondi aléatoire pour obtenir une solution insécable

Méthodes considérant un seul pas de temps

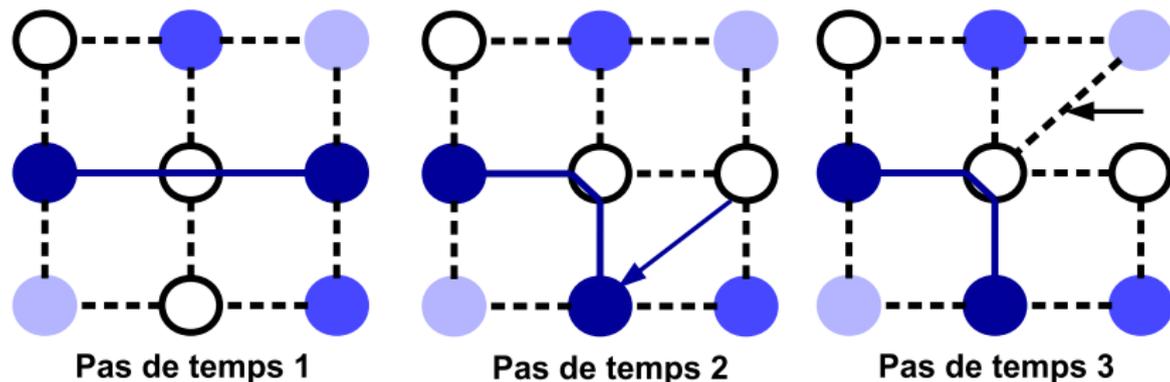


Pas de temps courant

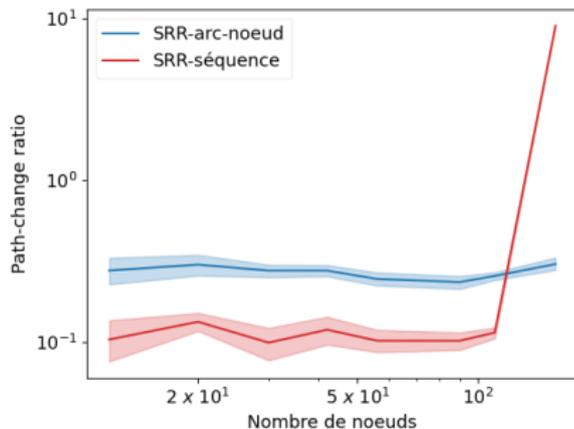
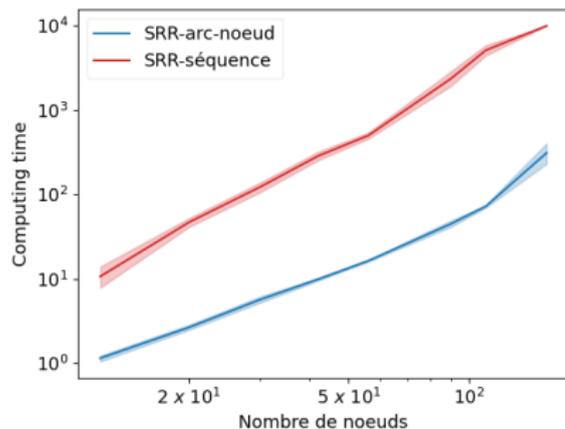
Résolution similaire au problème statique :

- Calcul d'une solution sécable
- Arrondi aléatoire pour obtenir une solution insécable

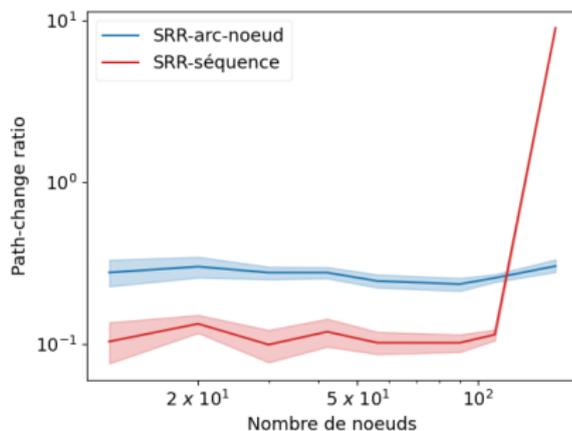
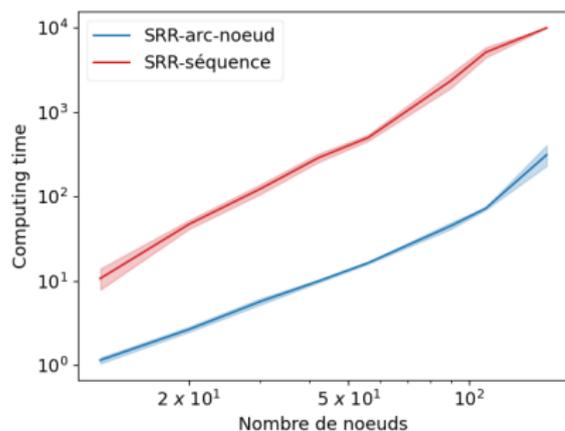
Méthodes considérant plusieurs pas de temps



Résultats



Temps de calcul (s) et performance sur des graphes de 10 à 150 noeuds



Temps de calcul (s) et performance sur des graphes de 10 à 150 noeuds



Lamothe et al. The dynamic unsplittable flow problem. Soumis au European Journal of Operational Research

Instance Telesat

- 300 satellites + 100 antennes réseau
- 2000 liens de communication (10 Gbps)
- 34 000 utilisateurs (\approx 6 Tbps)
- 6% des origines/destinations changent

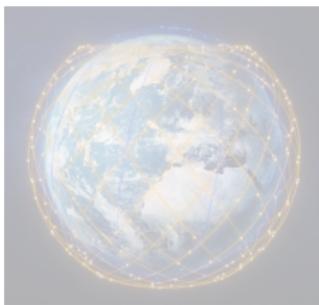
Instance Telesat

- 300 satellites + 100 antennes réseau
- 2000 liens de communication (10 Gbps)
- 34 000 utilisateurs (≈ 6 Tbps)
- 6% des origines/destinations changent

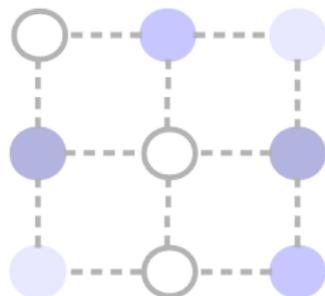
Résultats

- Beaucoup d'utilisateurs \rightarrow insécable \approx sécable
- 2% dépassement autorisé \rightarrow 10% changement chemins supplémentaires
- Temps de calcul : 100 sec / pas de temps
- Favoriser les chemins courts

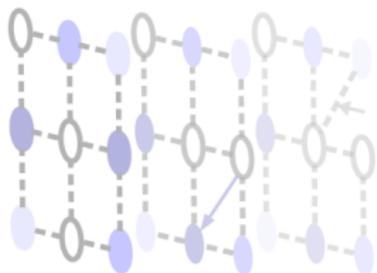
Plan de la présentation



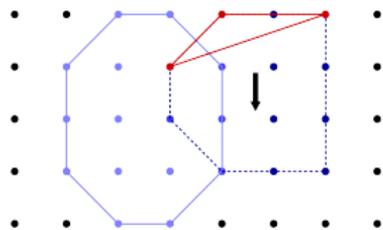
1. Une constellation de satellites



2. Flots insécables et arrondi aléatoire



3. Flots insécables dynamiques



4. Méthodes de décomposition

Modélisation des flots insécables

f_{ek} : passage du flot

Δ_e : dépassements de capacité

$$\min_{\substack{f_{ek} \in \{0,1\} \\ \Delta_e \in \mathbb{R}^+}} \sum_{e \in E} \Delta_e$$

tel que

$$\sum_{e \in E^+(v)} f_{ek} - \sum_{e \in E^-(v)} f_{ek} = \delta_v^{o_k} - \delta_v^{d_k}$$

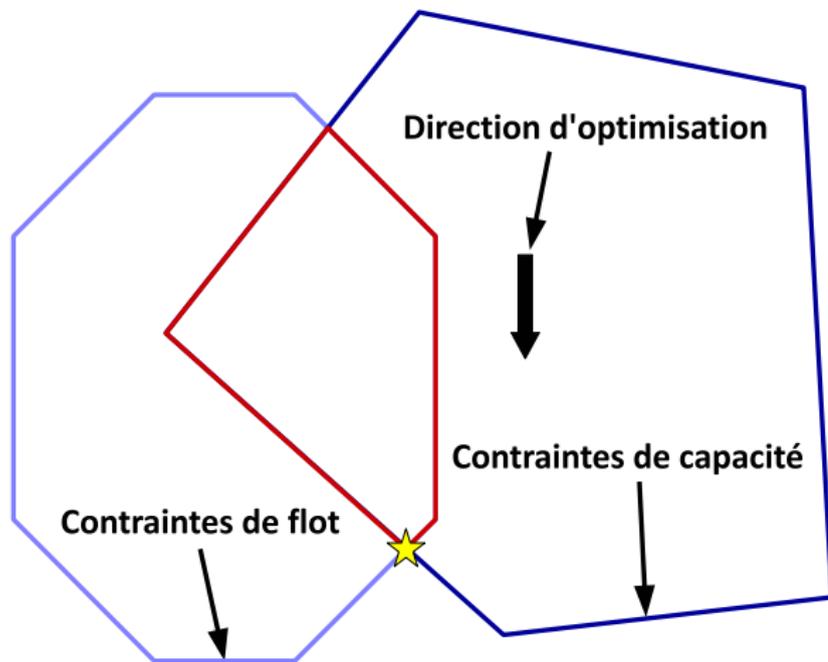
$$\sum_{k \in K} f_{ek} D_k \leq c_e + \Delta_e$$

Minimisation des
dépassements de capacité

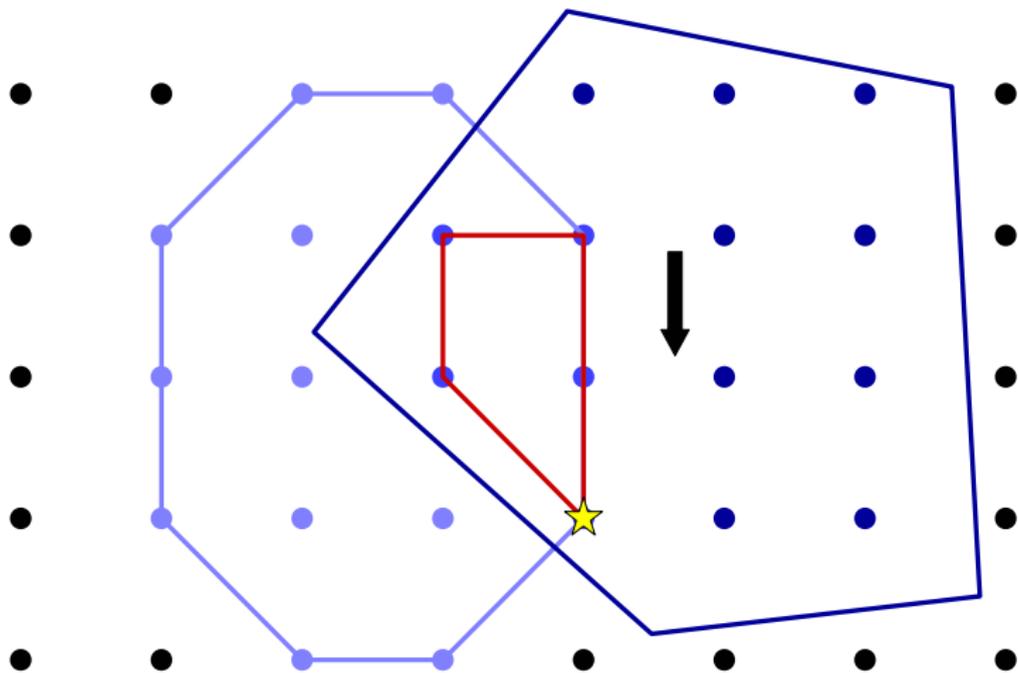
Contraintes de flot

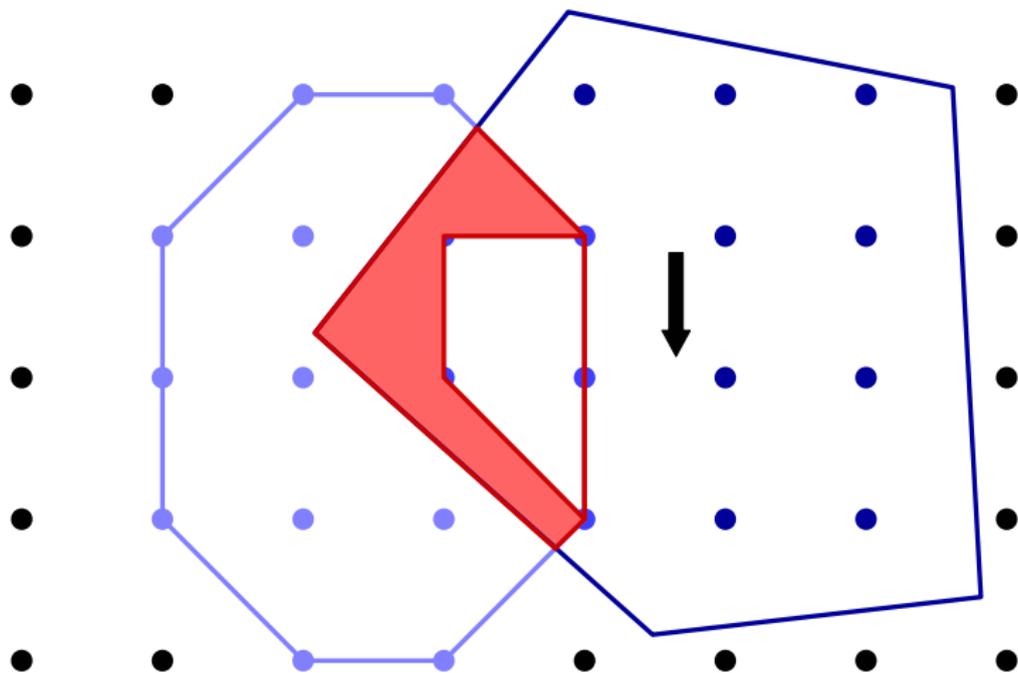
Contraintes de capacité

Programmation linéaire en nombres entiers

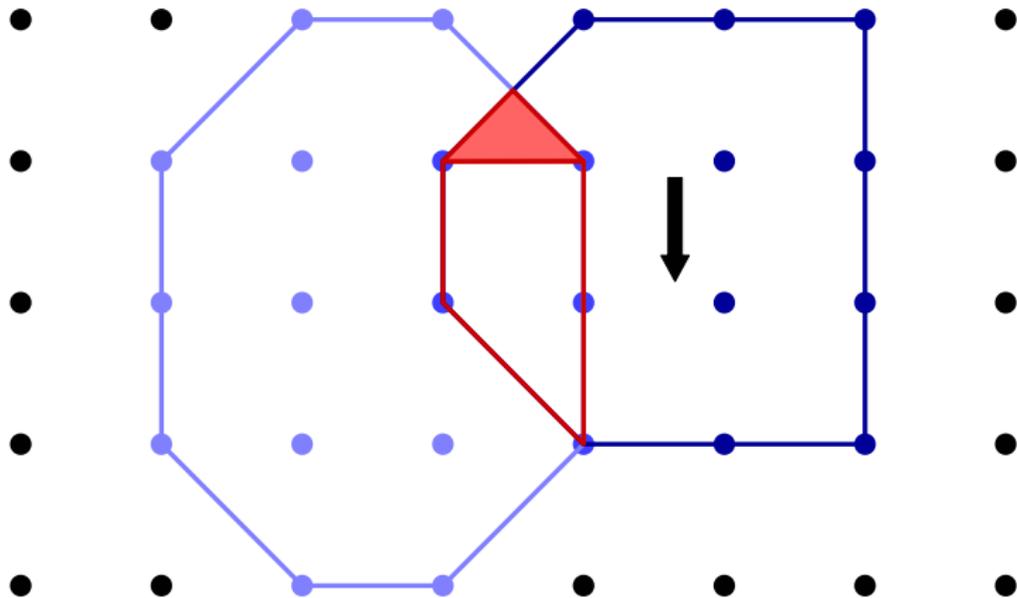


Programmation linéaire en nombres entiers

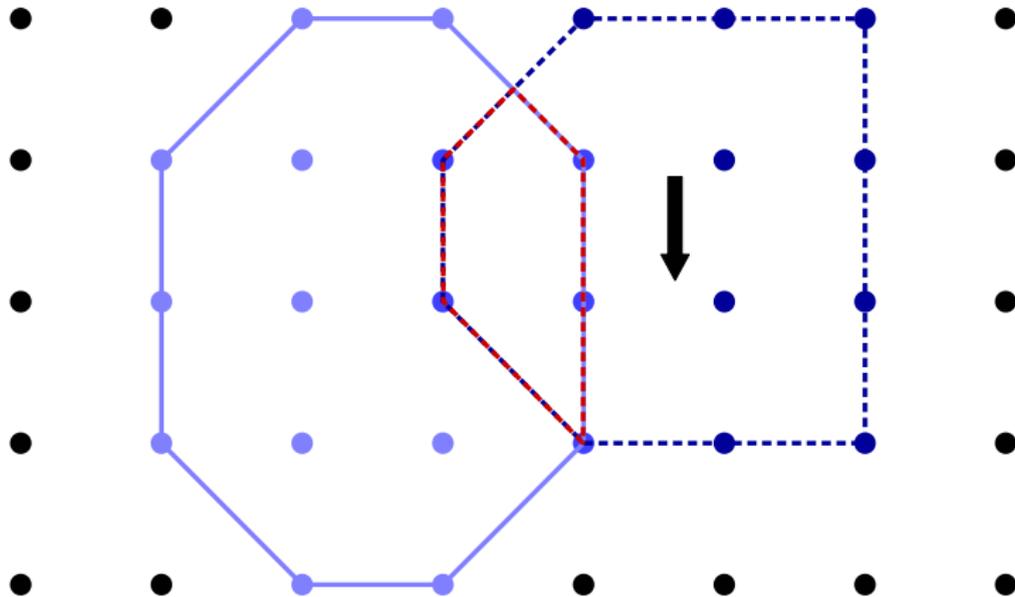




L'intersection des polyèdres approxime l'espace des solutions



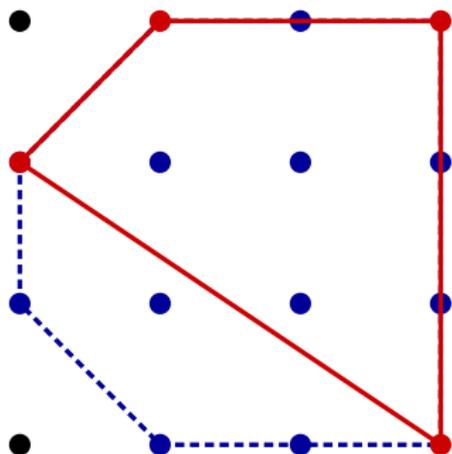
Une meilleure approximation de l'espace des solutions



Polyèdre connu uniquement implicitement

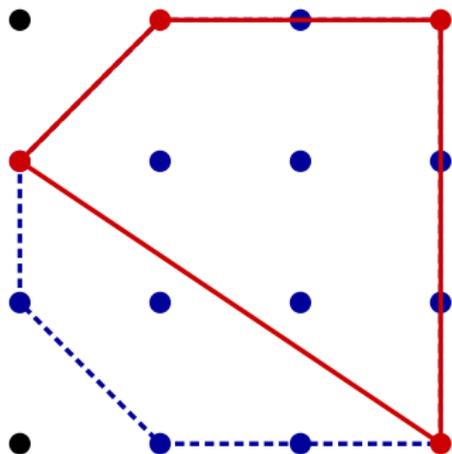
Méthodes de décomposition pour approximer des polyèdres

Méthodes de décomposition pour approximer des polyèdres

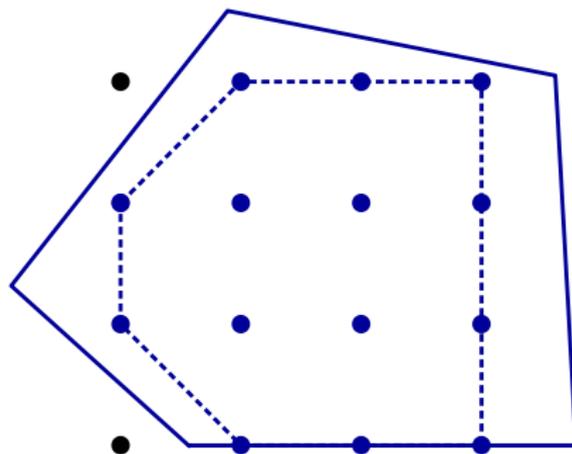


Décomposition de Dantzig-Wolfe
1960

Méthodes de décomposition pour approximer des polyèdres

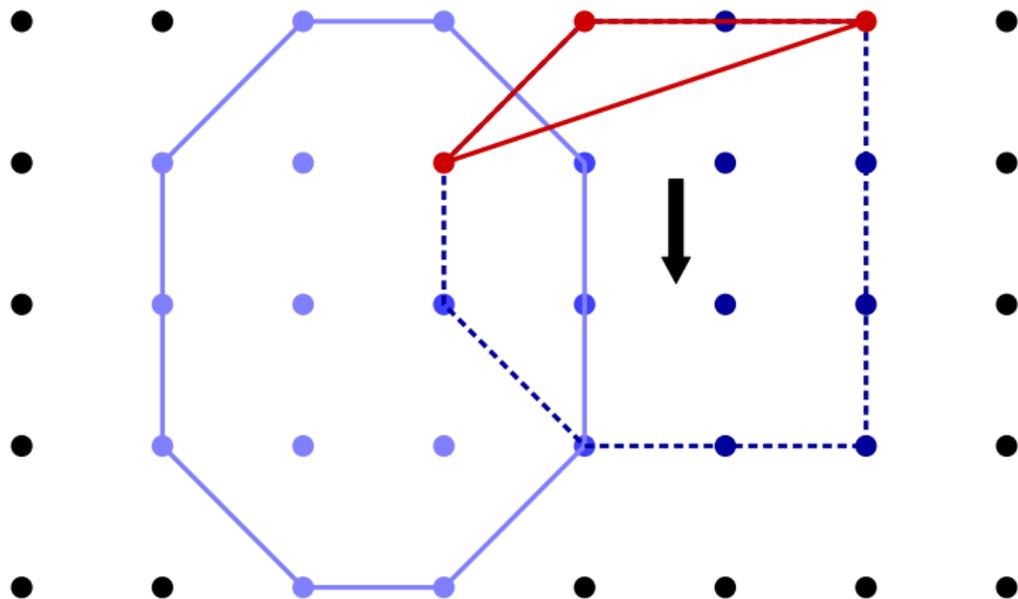


Décomposition de Dantzig-Wolfe
1960



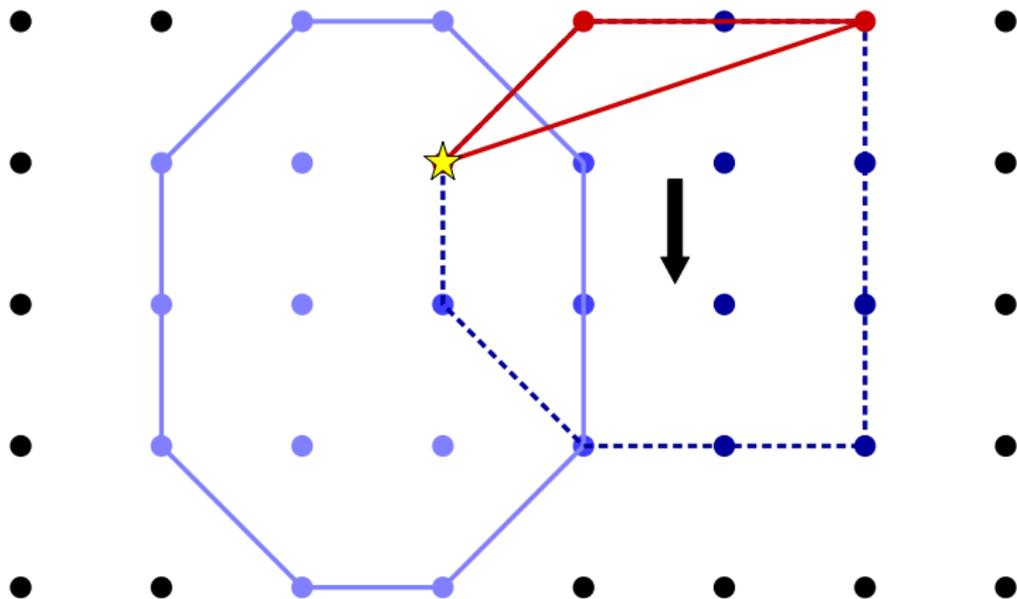
Décomposition de Fenchel
1994

Décomposition de Dantzig-Wolfe



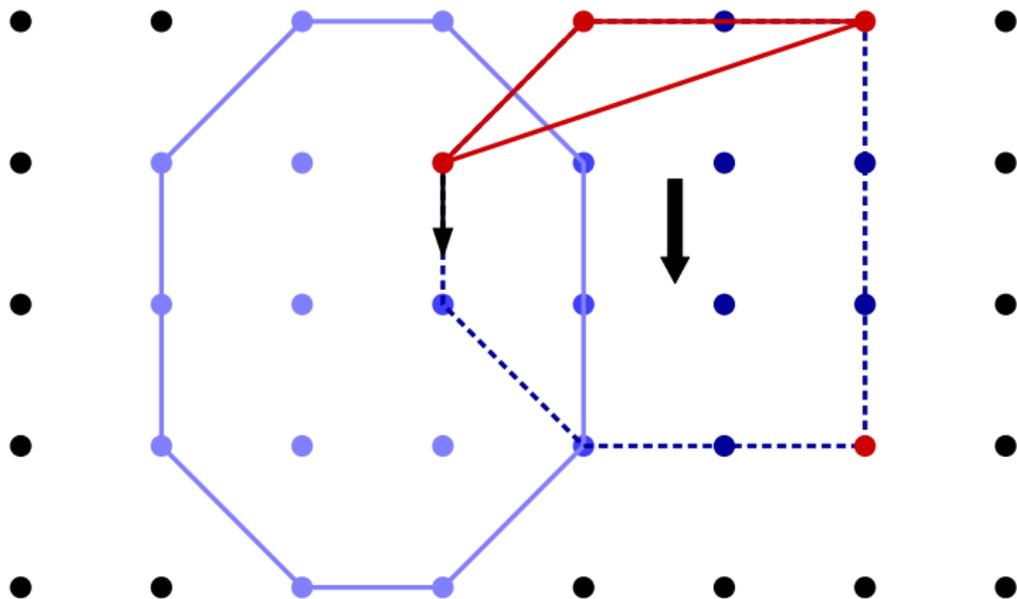
La décomposition de Dantzig-Wolfe fait grandir une approximation interne du polyèdre

Décomposition de Dantzig-Wolfe



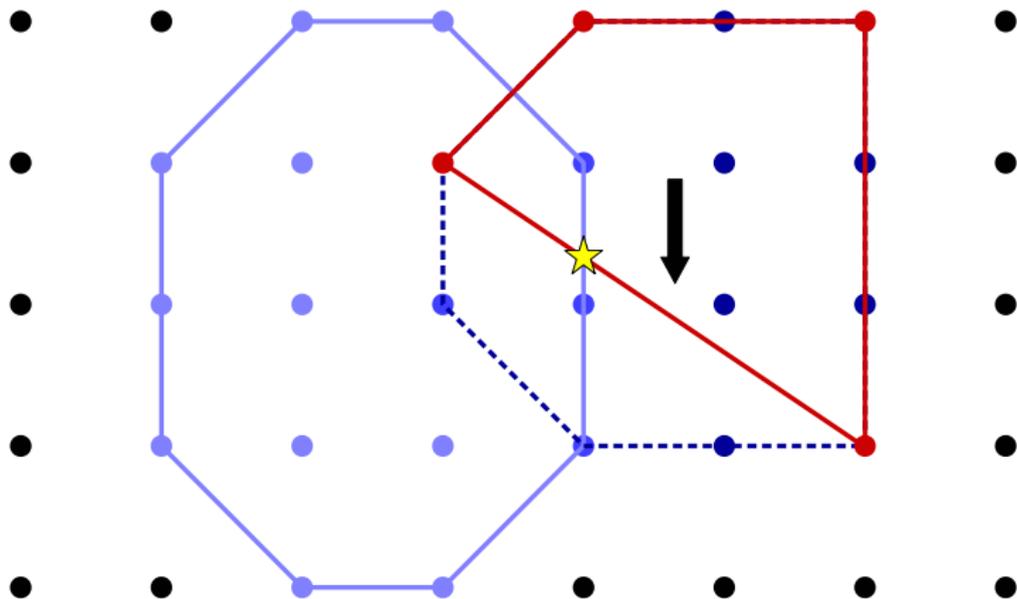
La décomposition de Dantzig-Wolfe fait grandir une approximation interne du polyèdre

Décomposition de Dantzig-Wolfe



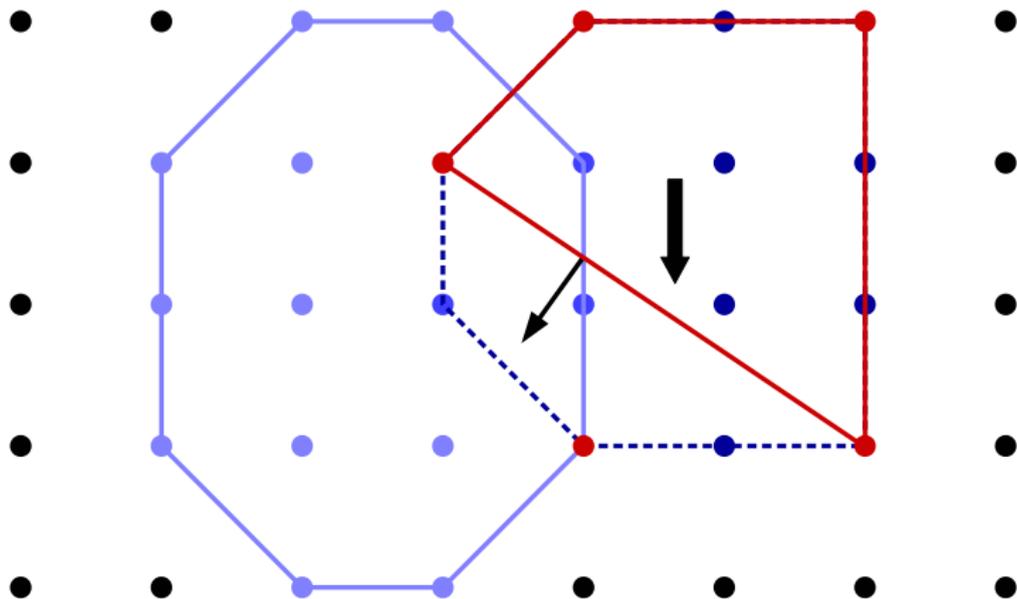
La décomposition de Dantzig-Wolfe fait grandir une approximation interne du polyèdre

Décomposition de Dantzig-Wolfe



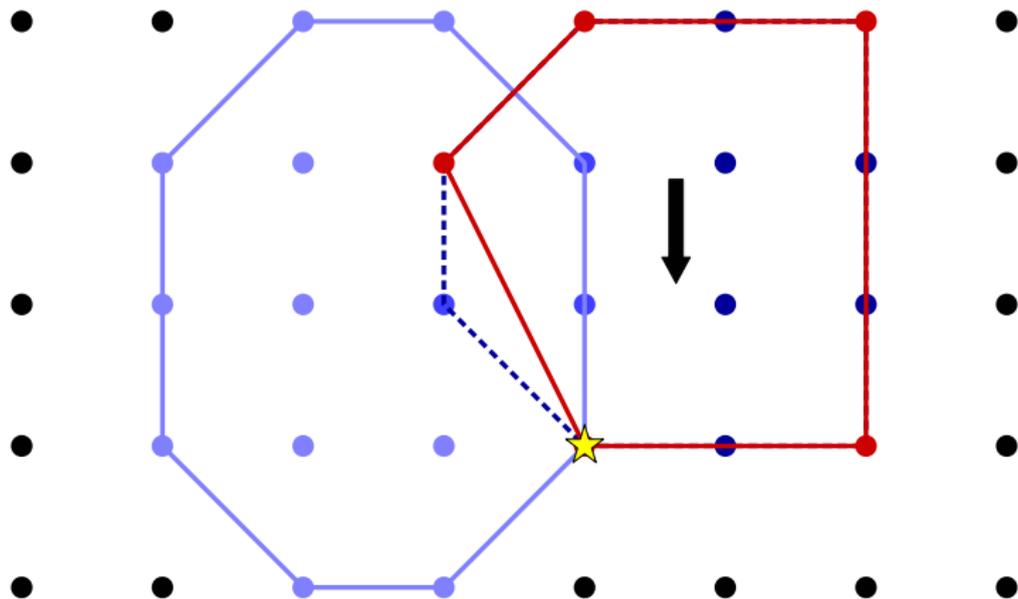
La décomposition de Dantzig-Wolfe fait grandir une approximation interne du polyèdre

Décomposition de Dantzig-Wolfe



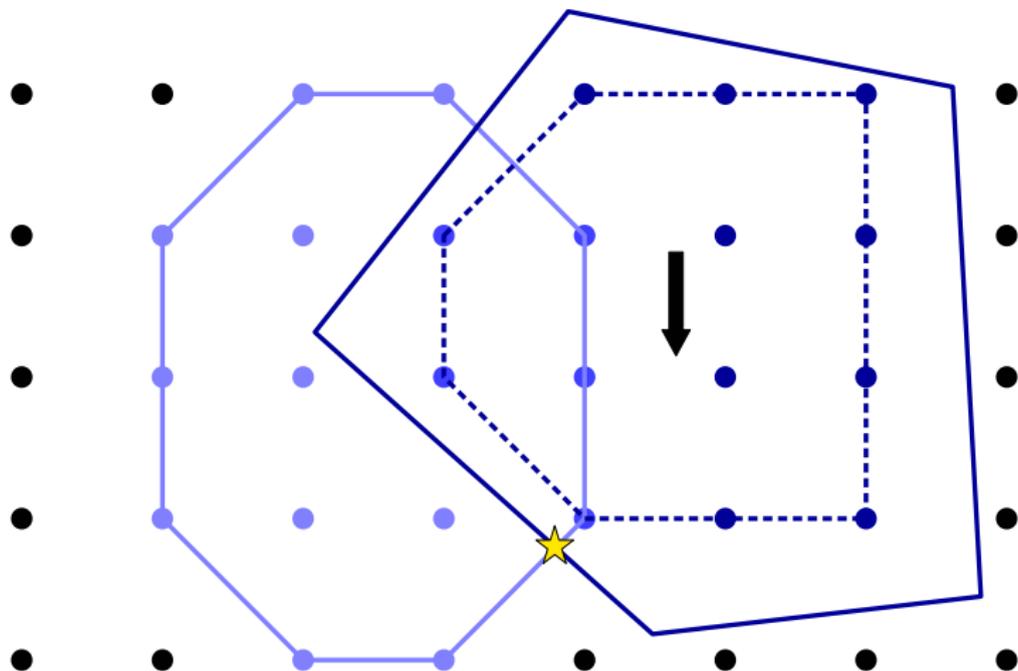
La décomposition de Dantzig-Wolfe fait grandir une approximation interne du polyèdre

Décomposition de Dantzig-Wolfe



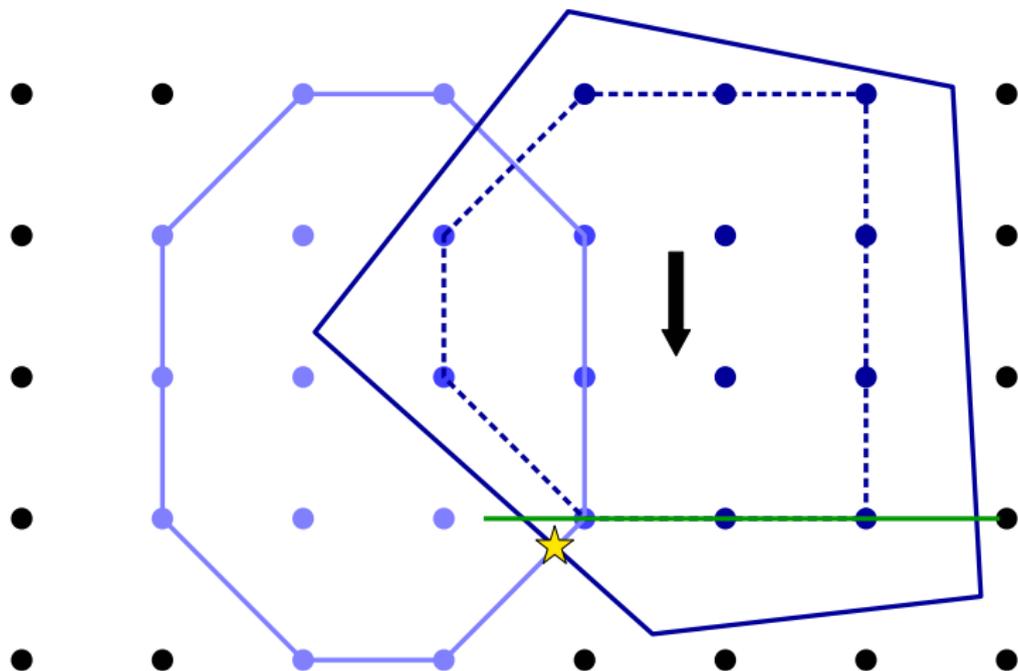
La décomposition de Dantzig-Wolfe fait grandir une approximation interne du polyèdre

Décomposition de Fenchel



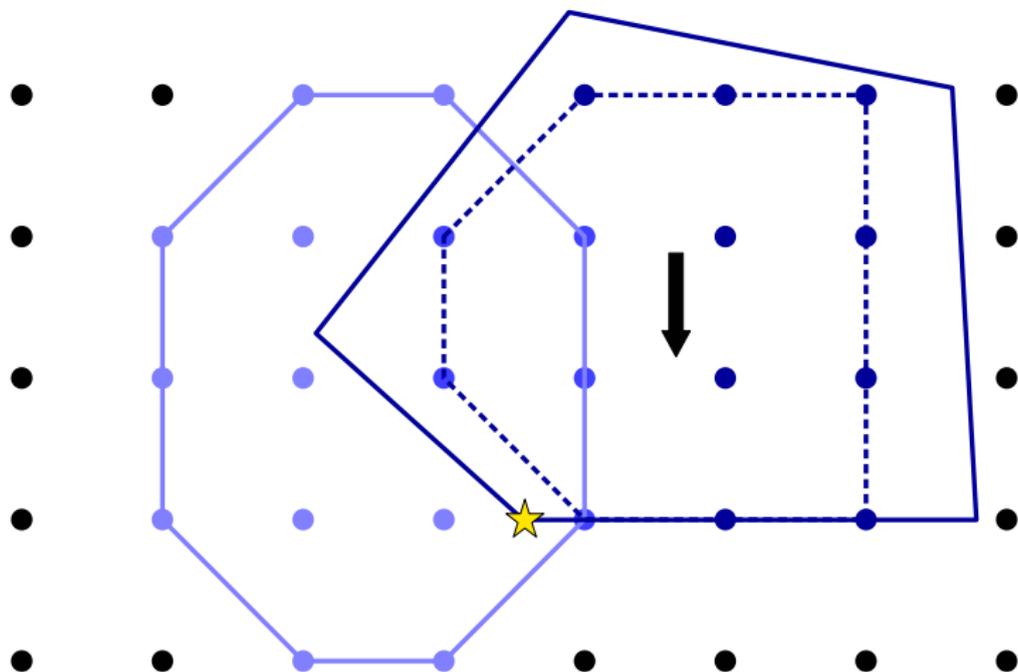
La décomposition de Fenchel affine une approximation externe du polyèdre

Décomposition de Fenchel



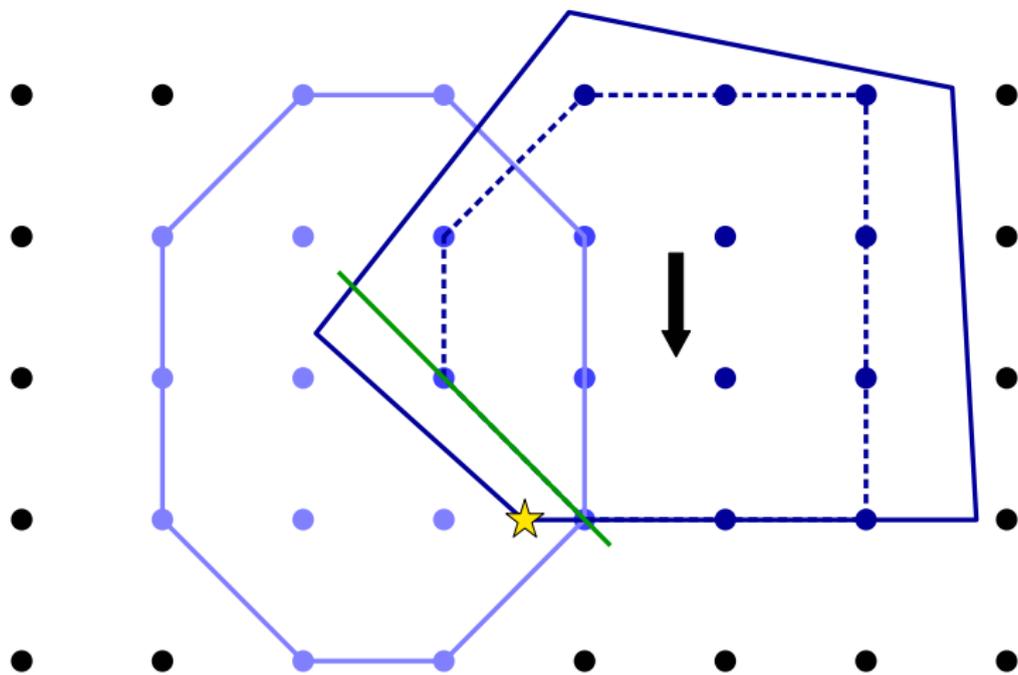
La décomposition de Fenchel affine une approximation externe du polyèdre

Décomposition de Fenchel



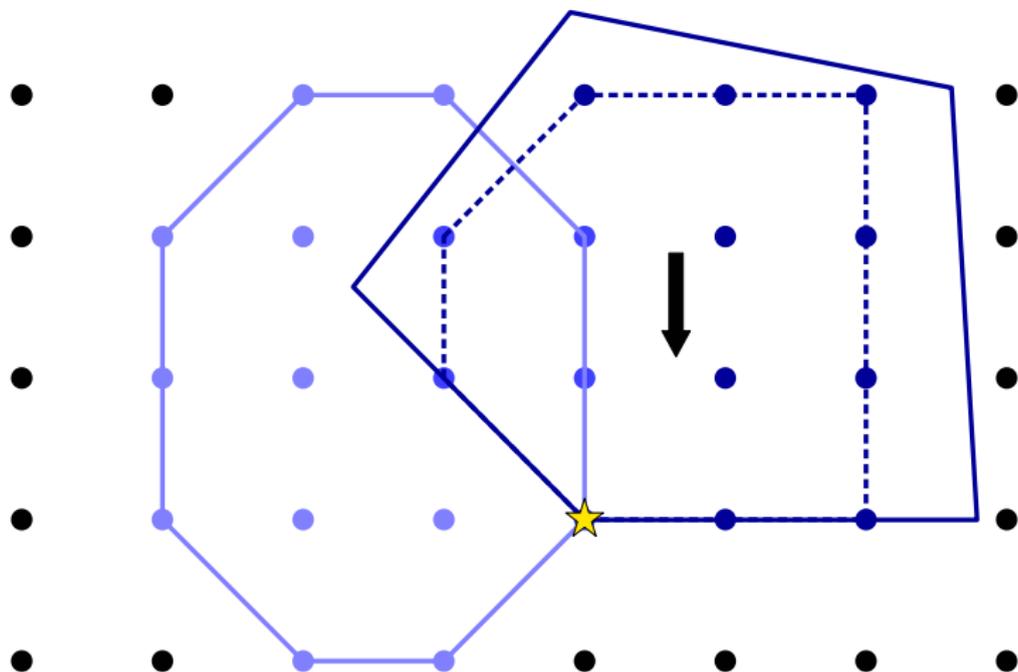
La décomposition de Fenchel affine une approximation externe du polyèdre

Décomposition de Fenchel



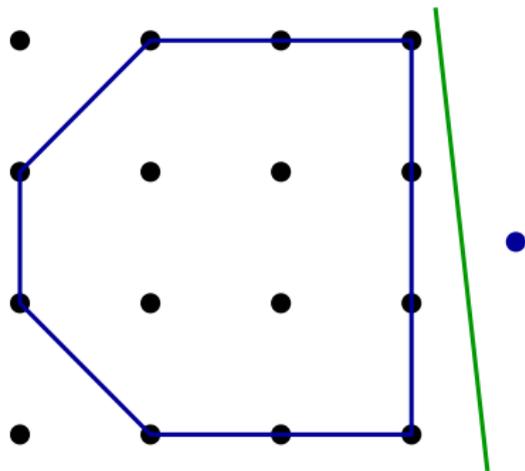
La décomposition de Fenchel affine une approximation externe du polyèdre

Décomposition de Fenchel



La décomposition de Fenchel affine une approximation externe du polyèdre

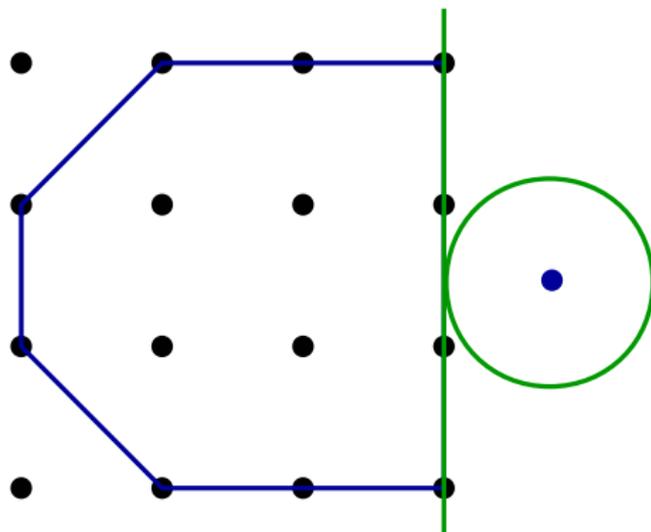
Décomposition de Fenchel



Quelle coupe choisir ?

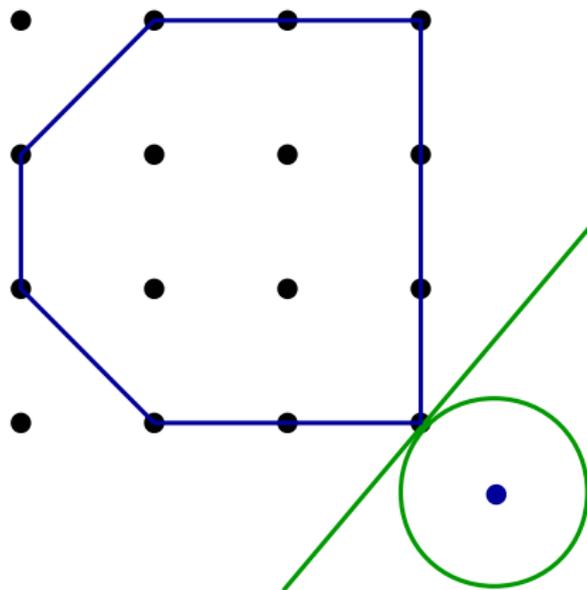
Normalisation : détermine la coupe renvoyée

Décomposition de Fenchel



Normalisation en norme $\|\cdot\|_2$
Renvoie la coupe la plus éloignée du point à séparer

Décomposition de Fenchel

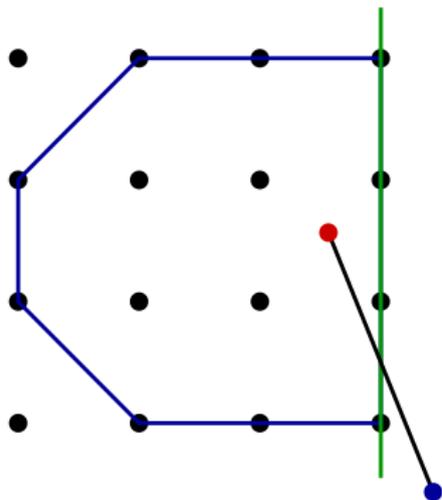


Normalisation en norme $\|\cdot\|_2$

Renvoie la coupe la plus éloignée du point à séparer

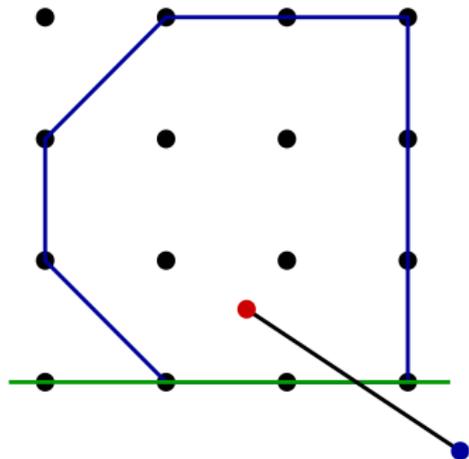
Ne garantit pas la génération d'une facette

Décomposition de Fenchel

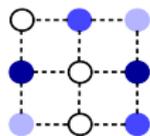


Normalisation directionnelle

Décomposition de Fenchel



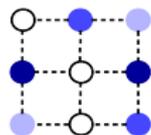
Normalisation directionnelle



70 à 145 noeuds

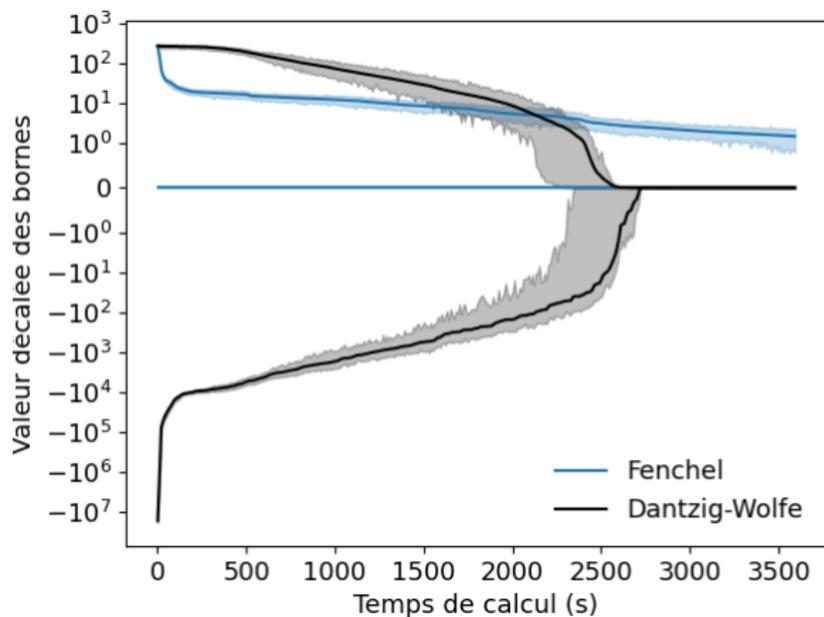
350 à 725 arcs

Résultats

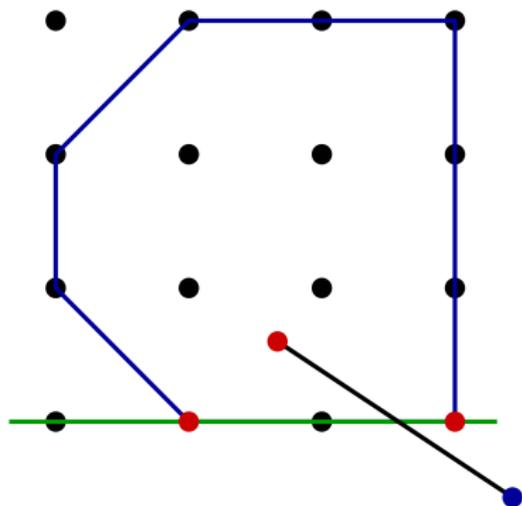


70 à 145 noeuds

350 à 725 arcs



Décomposition de Dantzig-Wolfe-Fenchel

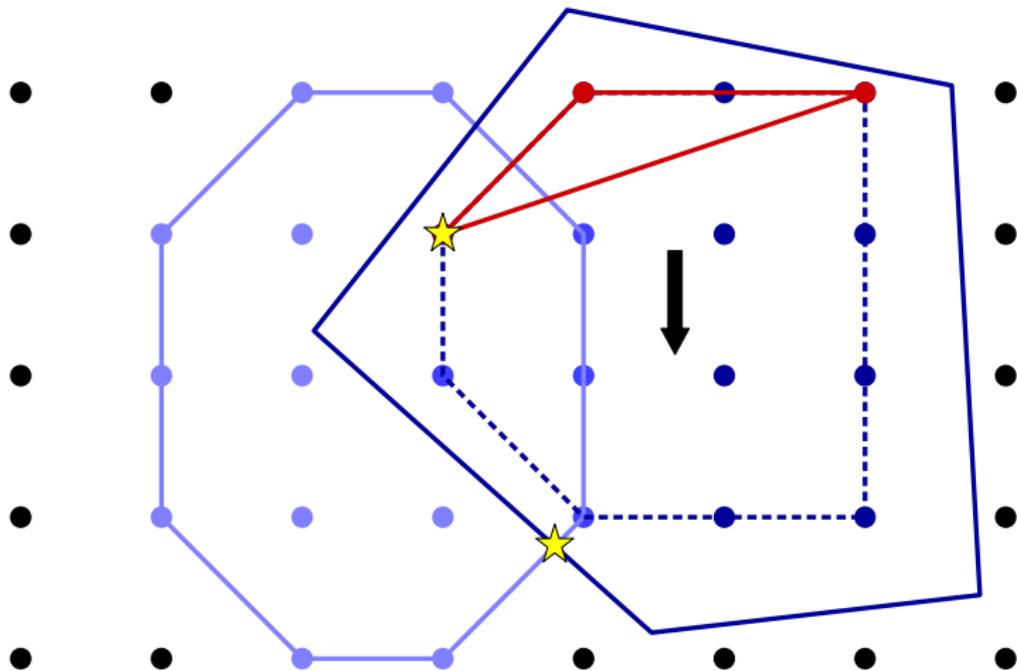


Le problème de séparation génère une coupe et des sommets

Coupe \rightarrow approximation externe

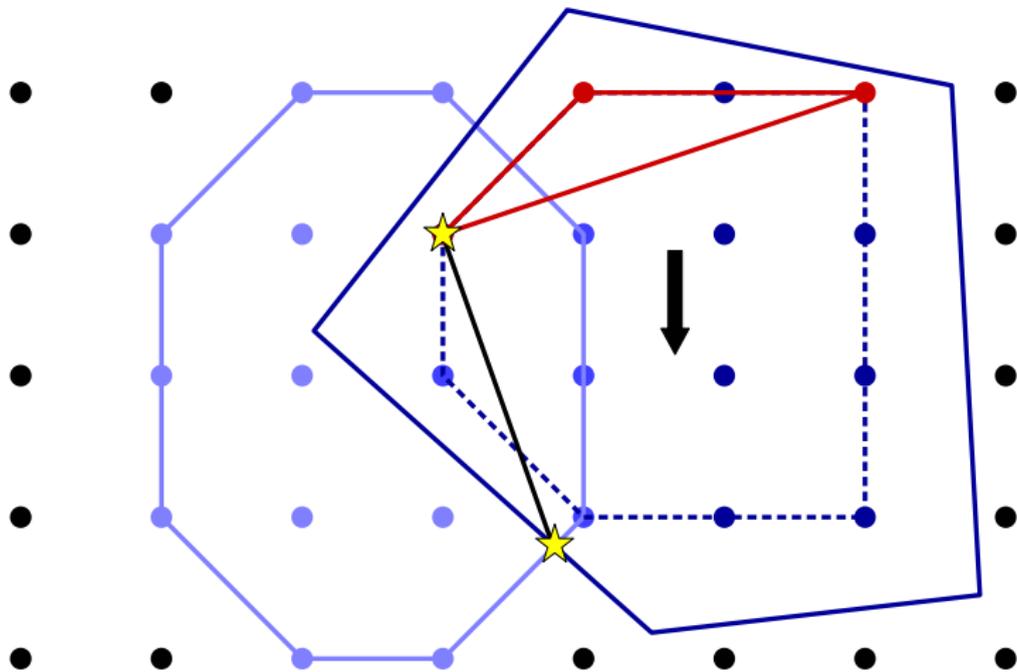
Sommets \rightarrow approximation interne

Décomposition de Dantzig-Wolfe-Fenchel



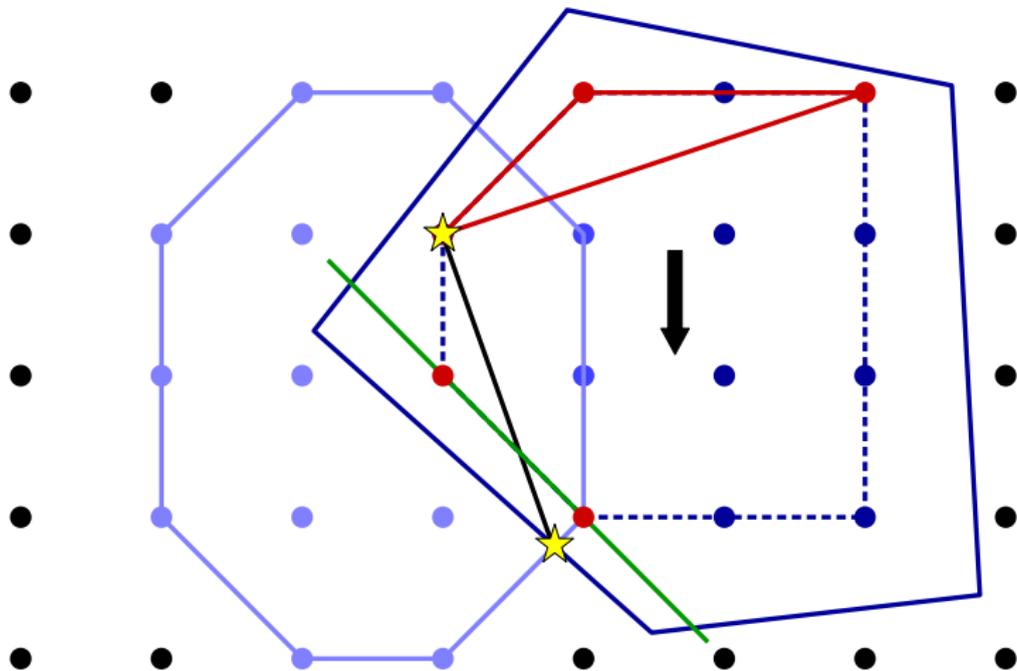
Déroulement de la décomposition de Dantzig-Wolfe-Fenchel

Décomposition de Dantzig-Wolfe-Fenchel



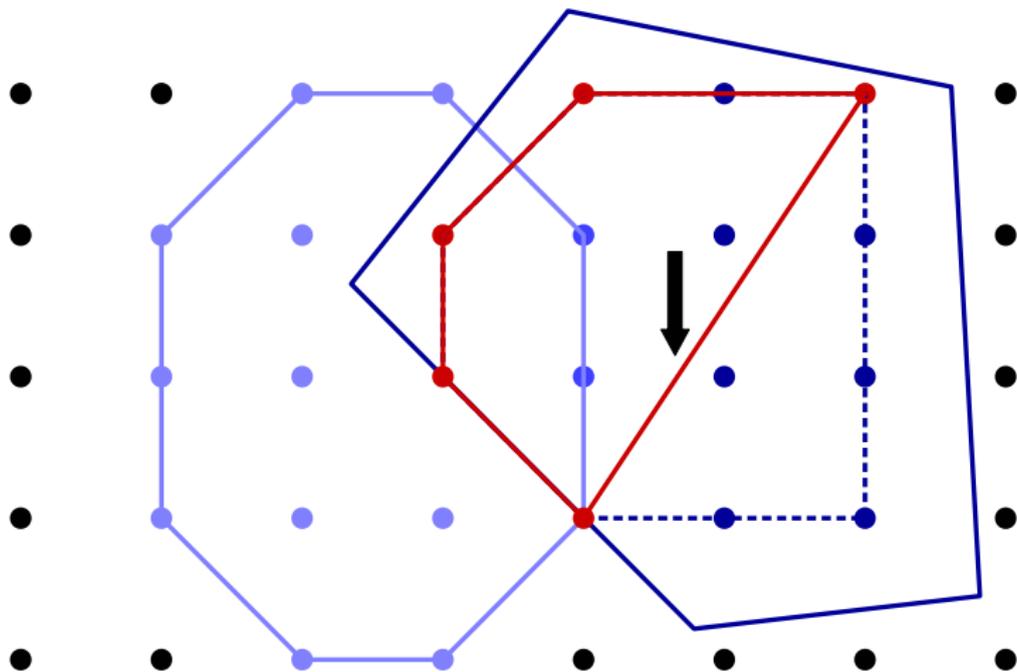
Déroulement de la décomposition de Dantzig-Wolfe-Fenchel

Décomposition de Dantzig-Wolfe-Fenchel



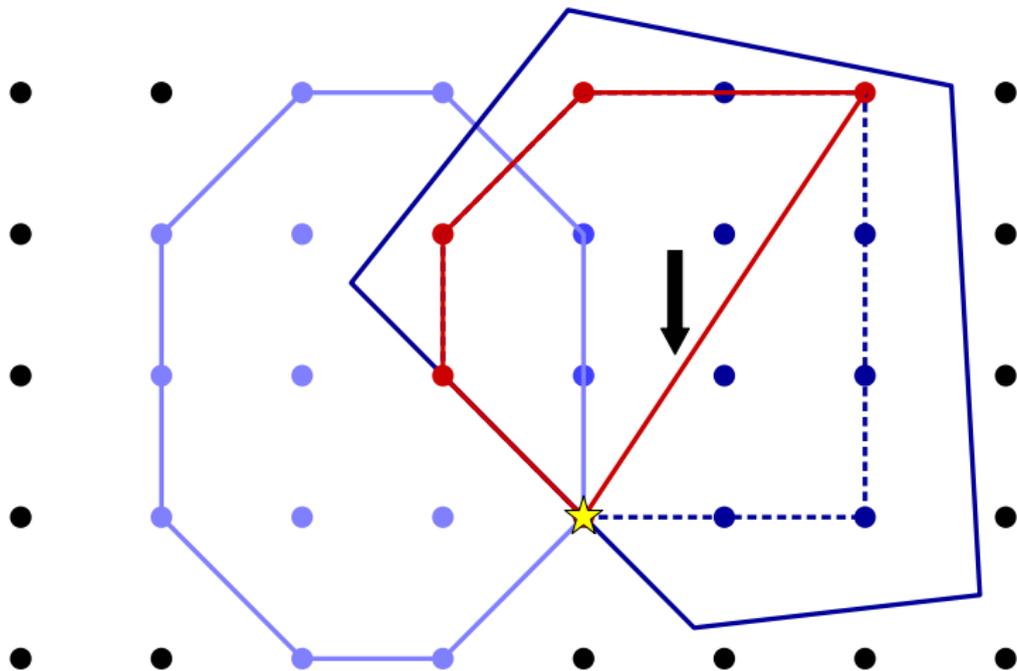
Déroulement de la décomposition de Dantzig-Wolfe-Fenchel

Décomposition de Dantzig-Wolfe-Fenchel



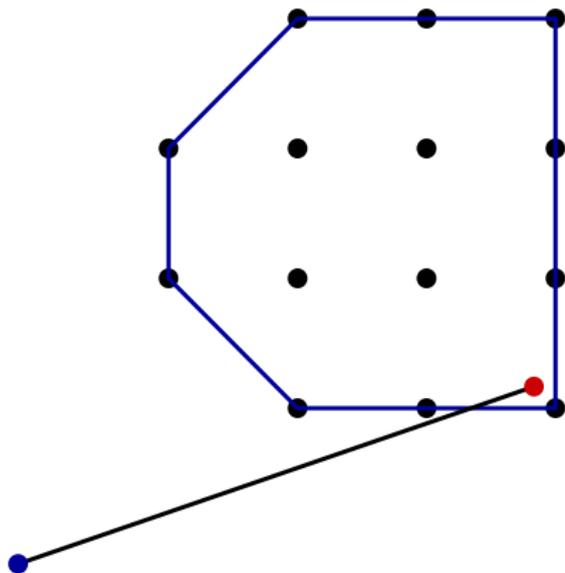
Déroulement de la décomposition de Dantzig-Wolfe-Fenchel

Décomposition de Dantzig-Wolfe-Fenchel

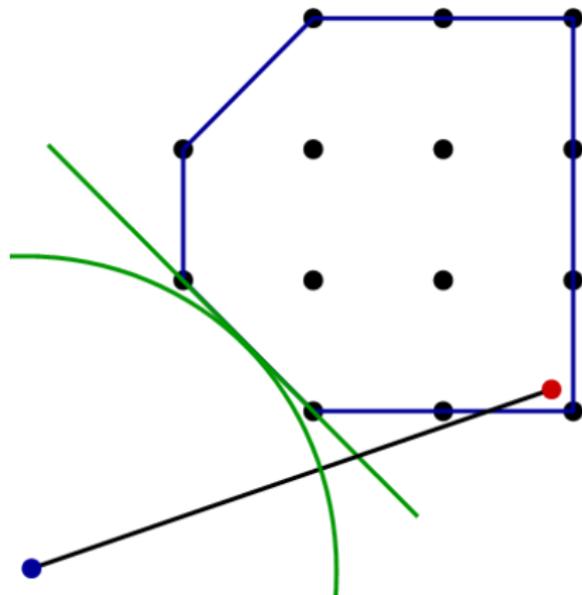


Déroulement de la décomposition de Dantzig-Wolfe-Fenchel

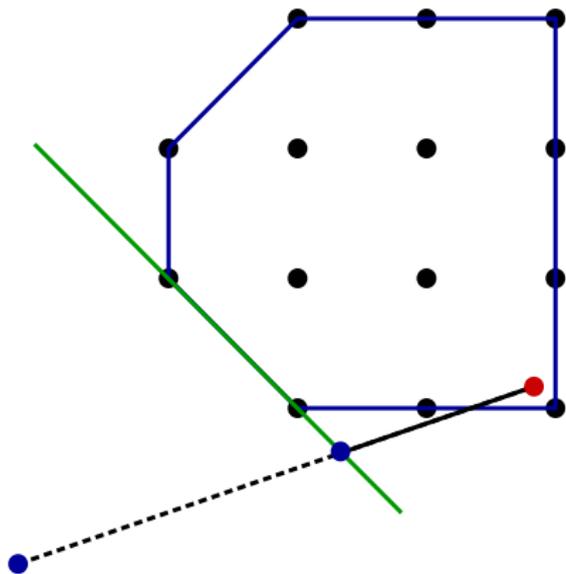
Résolution itérative du problème de séparation



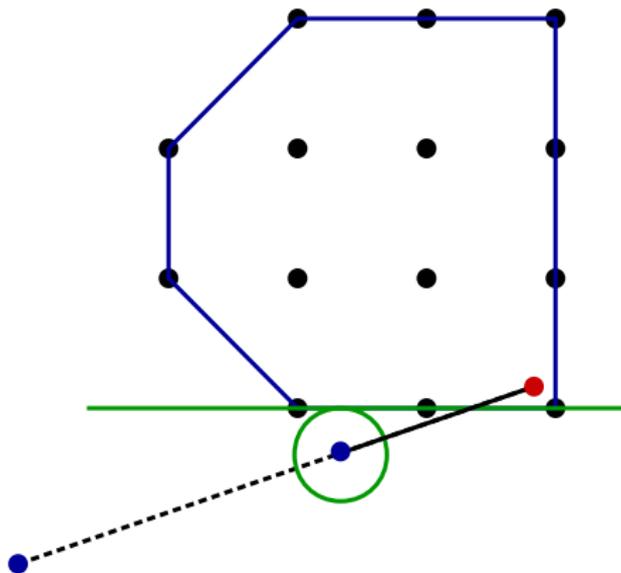
Résolution itérative du problème de séparation



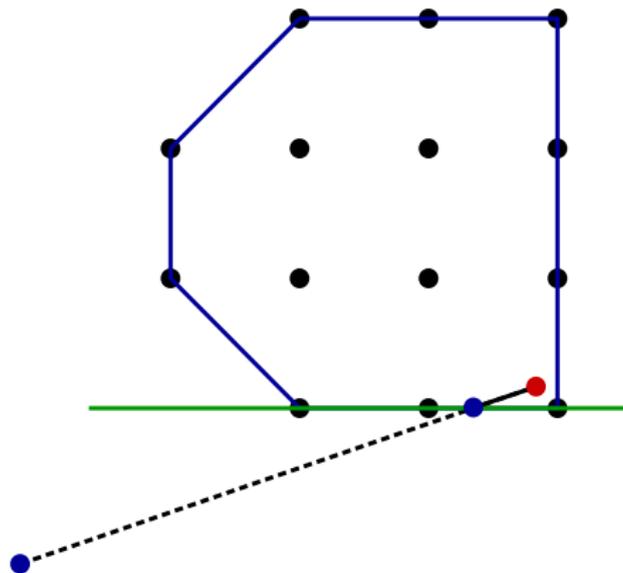
Résolution itérative du problème de séparation



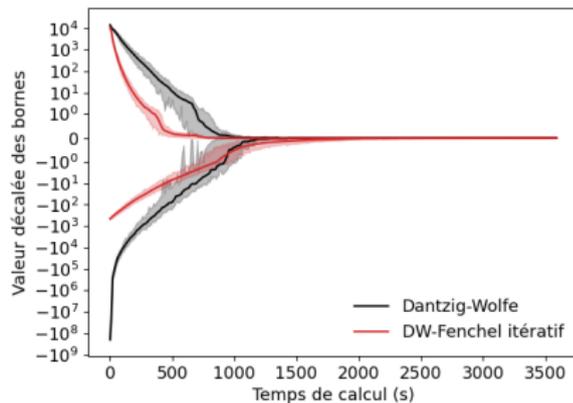
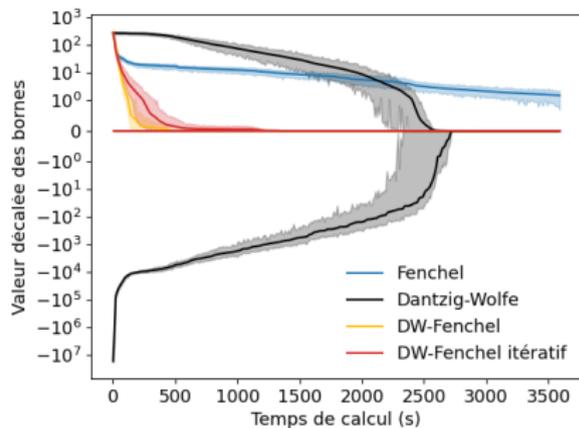
Résolution itérative du problème de séparation



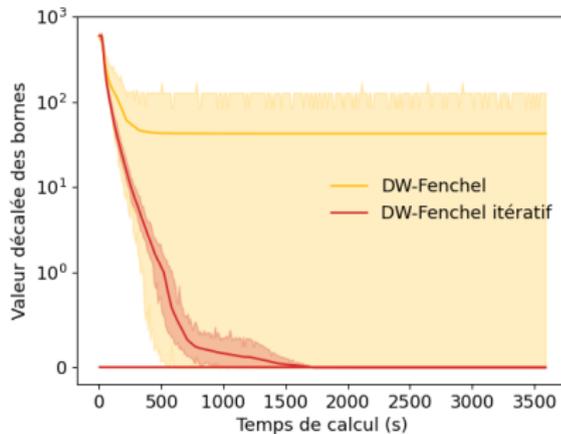
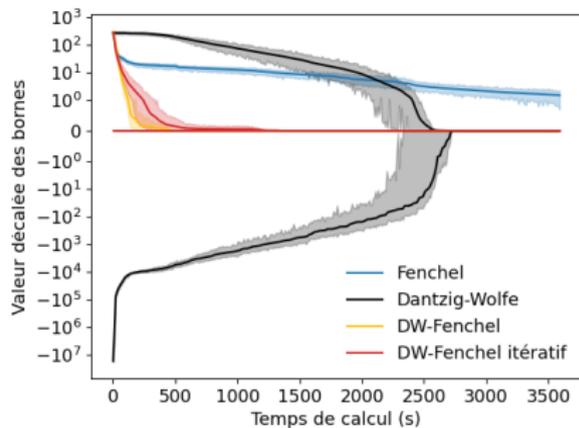
Résolution itérative du problème de séparation

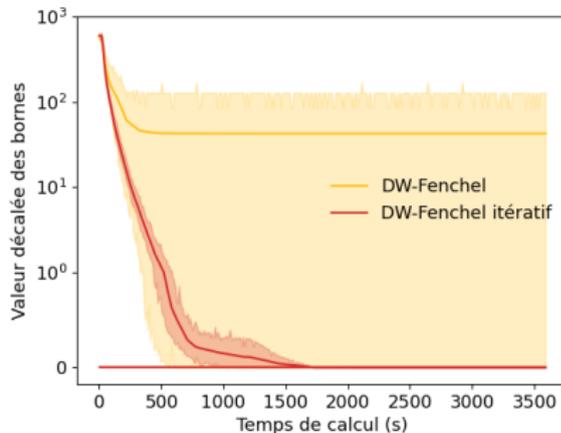
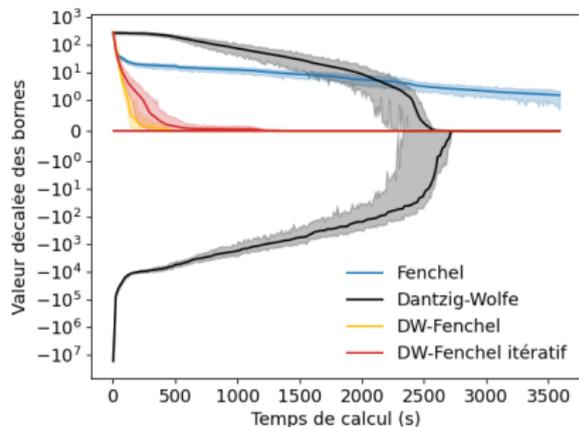


Résultats



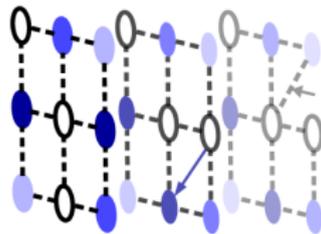
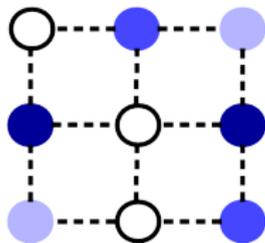
Résultats



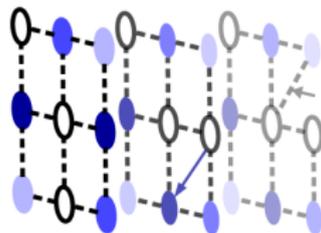
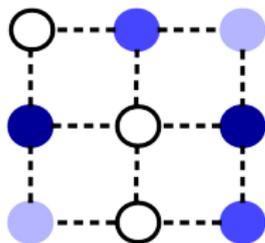


Lamothe et al. Strengthening the linear relaxation of mixed integer linear programs with decomposition methods. En préparation.

Conclusion

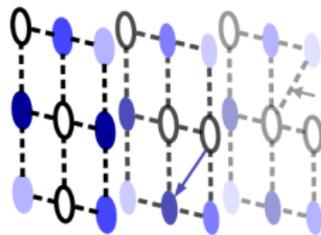
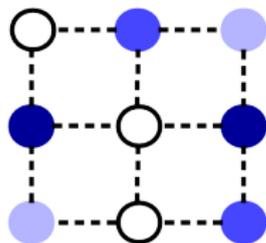


Conclusion



- Arrondi Aléatoire Séquentiel
 - Très bon résultats pratiques : Telesat
 - Extension des garanties théoriques

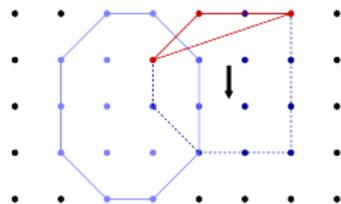




- Arrondi Aléatoire Séquentiel
 - Très bon résultats pratiques : Telesat
 - Extension des garanties théoriques



- Méthodes de décomposition
 - Proposition d'une nouvelle méthode
 - Très bons résultats sur les flots insécables

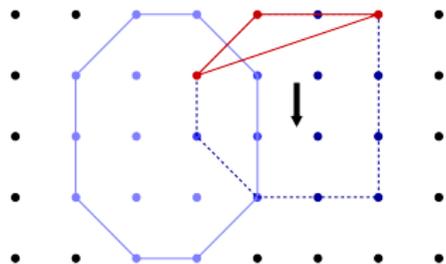
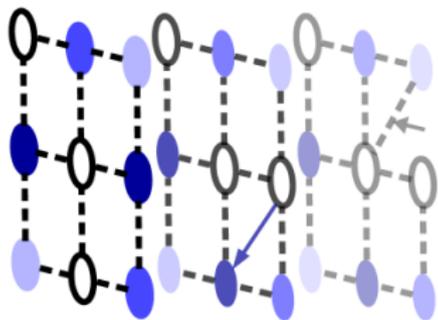
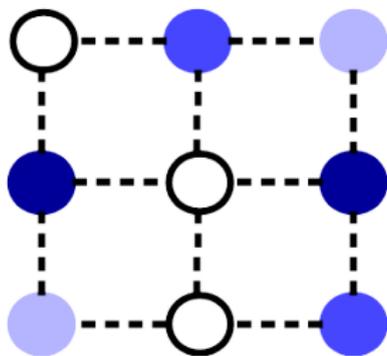
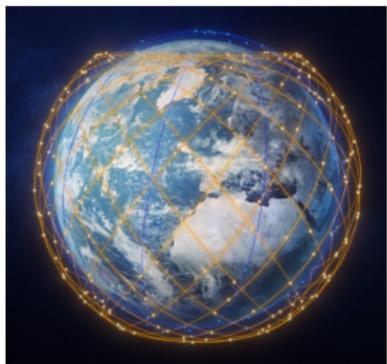


- Modélisation
 - Premier lien utilisateur
 - Phénomènes aléatoires (météo, défaillances ...)

- Modélisation
 - Premier lien utilisateur
 - Phénomènes aléatoires (météo, défaillances ...)

- Arrondi aléatoire séquentiel
 - Remettre en cause les choix d'arrondi (*backtracking*)
 - Étudier d'autres problèmes (*packing, covering ...*)

- Modélisation
 - Premier lien utilisateur
 - Phénomènes aléatoires (météo, défaillances ...)
- Arrondi aléatoire séquentiel
 - Remettre en cause les choix d'arrondi (*backtracking*)
 - Étudier d'autres problèmes (*packing, covering ...*)
- Méthodes de décomposition
 - Séparation alternative : Dantzig-Wolfe
 - Meilleure normalisation
 - Décomposition de Benders : normalisation, approximation interne
 - Applicable en PLNE : transport aérien, production d'énergie ...



Formulation du problème complet de la constellation

$$\min f((o_{et})_{e \in E_t, t \in T}) + \sum_{t \in T} \sum_{k \in K} n_t^k \quad (1.1a)$$

tel que

$$\sum_{e \in E_t^+(v)} f_{et}^k - \sum_{e \in E_t^-(v)} f_{et}^k = \delta_v^{O_t^k} - \delta_v^{D_t^k} \quad \forall k \in K, \forall v \in V, \forall t \in T, \quad (1.1b)$$

$$\sum_{k \in K} f_{et}^k d_t^k \leq c_e + o_{et} \quad \forall e \in E_t, \forall t \in T, \quad (1.1c)$$

$$\sum_{e \in E_t} f_{et}^k l_{et} \leq l_{max} \quad \forall k \in K, \forall t \in T, \quad (1.1d)$$

$$\sum_{s \in S} \sum_{m \in M} d_{etsm} = f_{et}^k d_t^k \quad \forall e \in E_t^k, \forall t \in T, \forall k \in K \quad (1.1e)$$

$$d_{etsm} \leq z_{etsm} d_t^k \quad \forall e \in E_t^k, \forall t \in T, \forall k \in K, \forall s \in S, \forall m \in M \quad (1.1f)$$

$$\sum_{m \in M} z_{etsm} = 1 \quad \forall e \in E_t^k, \forall t \in T, \forall k \in K, \forall s \in S \quad (1.1g)$$

$$z_{etsm} P_{ect} \gamma_m \leq \sum_{e' \in E(e)} x_{e'ts} P_{e't} + N_{et} \quad \forall e \in E_t^k, \forall t \in T, \forall k \in K, \forall s \in S, \forall m \in M \quad (1.1h)$$

$$\sum_{m \in M} \frac{d_{etsm}}{\eta_m} \leq x_{ets} B_{ets} \quad \forall e \in E_t^k, \forall t \in T, \forall s \in S, \forall k \in K \quad (1.1i)$$

$$\sum_{e \in E_t} x_{ets} \leq N_t \quad \forall t \in T, \forall s \in S \quad (1.1j)$$

$$f_{et}^k - f_{e,t+1}^k \leq n_t^k \quad \forall t \in T, \forall e \in E_t, \forall k \in K \quad (1.1k)$$

$$f_{et}^k \in \{0, 1\}, x_{ets} \in \{0, 1\}, z_{etsm} \in \{0, 1\} \quad (1.1l)$$

$$n_t^k \in \{0, 1\}, d_{etsm} \in \mathbb{R}^+, o_{et} \in \mathbb{R}^+, o_t \in \mathbb{R}^+ \quad (1.1m)$$

Formulation arc-noeud

$$\min_{f_e^k, o_e} \sum_{e \in E} o_e$$

tel que

$$\sum_{e \in E^+(v)} f_e^k - \sum_{e \in E^-(v)} f_e^k = \delta_v^{O^k} - \delta_v^{D^k} \quad \forall k \in K, \forall v \in V$$

$$\sum_{k \in K} f_e^k d^k \leq c_e + o_e \quad \forall e \in E$$

$$f_e^k \in \{0, 1\}, o_e \in \mathbb{R}^+ \quad \forall k \in K, \forall e \in E.$$

Formulation par chemin

$$\min_{x_p^k, o_e} \sum_{e \in E} o_e$$

tel que

$$\sum_{p \in P^k} x_p^k = 1 \quad \forall k \in K$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{p \in P^k | e \in p} x_p^k d^k \leq c_e + o_e \quad \forall e \in E$$

$$x_p^k \in \{0, 1\}, o_e \in \mathbb{R}^+ \quad \forall p \in \bigcup_k P^k, \forall k \in K, \forall e \in E.$$

Formulation par patron de commodités

$$\min_{y_e^g, o_e} \sum_{e \in E} o_e$$

tel que

$$\sum_{g \in G} y_e^g = 1 \quad \forall e \in E$$

$$\sum_{e \in \delta^+(v)} \sum_{g \in G | k \in g} y_e^g - \sum_{e \in \delta^-(v)} \sum_{g \in G | k \in g} y_e^g = \delta_v^{O^k} - \delta_v^{D^k} \quad \forall k \in K, \forall v \in V$$

$$\sum_{g \in G} y_e^g o_e^g \leq o_e \quad \forall e \in E$$

$$y_e^g \in \{0, 1\}, o_e \in \mathbb{R}^+ \quad \forall e \in E, \forall g \in G$$

Formulation par chemin étendue

$$\min_{x_{pt}^k, n_{pt}^k, o_{et}, o_t} \sum_{k \in K, t \in T} n_{pt}^k + \sum_{t \in T} o_t$$

tel que

$$\sum_{p \in P_t^k} x_{pt}^k = 1$$

$$\forall k \in K \forall t \in T$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{p \in P_t^k | e \in p} x_{pt}^k d_t^k \leq c_{et}(1 + o_{et})$$

$$\forall e \in E_t \forall t \in T$$

$$\sum_{e \in E_t} o_{et} \leq B + o_t$$

$$\forall t \in T$$

$$x_{pt}^k - x_{p,t-1}^k \leq n_{pt}^k$$

$$\forall p \in P_t^k \forall k \in K \forall t \in T \setminus \{0\}$$

$$x_{pt}^k \in \{0, 1\}, n_{pt}^k \in \mathbb{R}^+, o_{et} \in \mathbb{R}^+, o_t \in \mathbb{R}^+$$

$$\forall p \in \bigcup_k P_t^k, \forall k \in K, \forall e \in E_t,$$

$$\forall t \in T$$

Formulation par combinaison de chemins

$$\min_{x_s^k, o_{et}, o_t} \sum_{k \in K} \sum_{s \in S^k} n_s^k x_s^k + \sum_{t \in T} o_t$$

tel que

$$\sum_{s \in S^k} x_s^k = 1 \quad \forall k \in K$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{s \in S_{et}^k} x_s^k d^k \leq c_e (1 + o_{et}) \quad \forall e \in E_t \quad \forall t \in T$$

$$\sum_{e \in E_t} o_{et} \leq B + o_t \quad \forall t \in T$$

$$x_s^k \in \{0, 1\}, \quad o_{et} \in \mathbb{R}^+, \quad o_t \in \mathbb{R}^+ \quad \forall s \in \bigcup_k S^k, \quad \forall k \in K, \quad \forall e \in E_t \quad \forall t \in T$$

Formulation arc-noeud agrégée

$$\min_{x_{p^k}^k, f_e^{k'}, o_e, o} \sum_{k \in K} (1 - x_{p^k}^k) + o$$

tel que

$$\sum_{e \in E^+(v)} f_e^{k'} - \sum_{e \in E^-(v)} f_e^{k'} = \sum_{k \in K'} d^k \delta_v^{O^k} - \sum_{k \in K'} d^k \delta_v^{D^k} \quad \forall k' \in K', \forall v \in V$$

$$\sum_{k \in k' | e \in p^k} x_{p^k}^k d^k \leq f_e^{k'} \quad \forall k' \in K', \forall e \in E$$

$$\sum_{k' \in K'} f_e^{k'} \sum_{k \in k'} d^k \leq c_e + o_e \quad \forall e \in E$$

$$\sum_{e \in E} o_e \leq B + o$$

$$f_e^{k'} \in \mathbb{R}^+, x_{p^k}^k \in [0, 1], o_e \in \mathbb{R}^+, o \in \mathbb{R}^+ \quad \forall k' \in K', \forall e \in E, \forall k \in K$$

Algorithme 1 L'heuristique RR

Entrées : $G = (V, E, c)$ un graphe avec des capacités sur ces arcs, $L = (O^k, D^k, d^k)_{k \in K}$ une liste de commodités

- 1: $((x_p^k)_{p \in P^k})_{k \in K} = \text{Résoudre_Relaxation_Linéaire}(G, L, K_{\text{fixed}}, (p_k)_{k \in K_{\text{fixed}}})$
 - 2: **Pour** chaque commodité k^* **faire**
 - 3: Choisir un chemin p^* dans P^{k^*} avec probabilité $x_{p^*}^{k^*}$
 - 4: $p^{k^*} = p^*$
 - 5: **Renvoyer** $(p_k)_{k \in K}$
-

Algorithme 2 L'heuristique SRR

Entrées : $G = (V, E, c)$ un graphe avec des capacités sur ces arcs, $L = (O^k, D^k, d^k)_{k \in K}$ une liste de commodités

- 1: Trier les commodités par ordre décroissant de demande
 - 2: $K_{fixed} = \emptyset$ \triangleright K_{fixed} est l'ensemble des indices des commodités fixées à un seul chemin
 - 3: **Pour** chaque commodité k^* par ordre décroissant de demande **faire**
 - 4: **Si** une actualisation est nécessaire **alors**
 - 5: $((x_p^k)_{p \in P^k})_{k \in K} = \text{Résoudre_Relaxation_Linéaire}(G, L, K_{fixed}, (p_k)_{k \in K_{fixed}})$
 - 6: Choisir un chemin p^* dans P^{k^*} avec probabilité $x_{p^*}^{k^*}$
 - 7: Ajouter l'index k^* à K_{fixed} .
 - 8: $p^{k^*} = p^*$
 - 9: **Renvoyer** $(p_k)_{k \in K}$
-

Flots insécables statiques : Recuit simulé

Encodage des solutions : un chemin par commodité

Itération : une commodité change de chemin

Quels chemins :

- k-plus-courts chemins
- Marche aléatoire (longueur + dépassement)
- Dijkstra (longueur + dépassement)

Flots insécables statiques : Recuit simulé

Encodage des solutions : un chemin par commodité

Itération : une commodité change de chemin

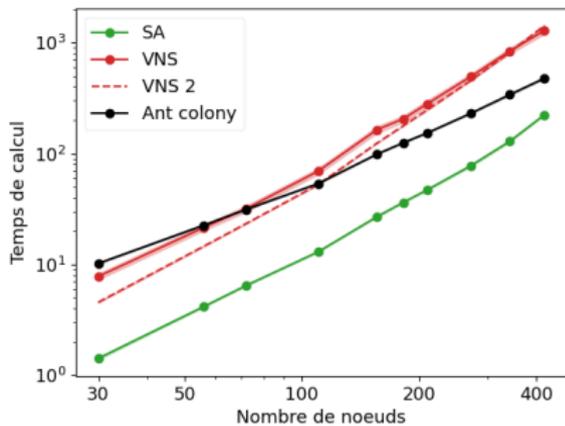
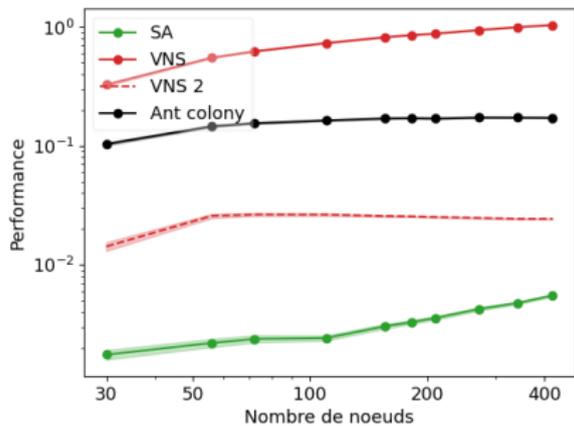
Quels chemins :

- k-plus-courts chemins
- Marche aléatoire (longueur + dépassement)
- Dijkstra (longueur + dépassement)

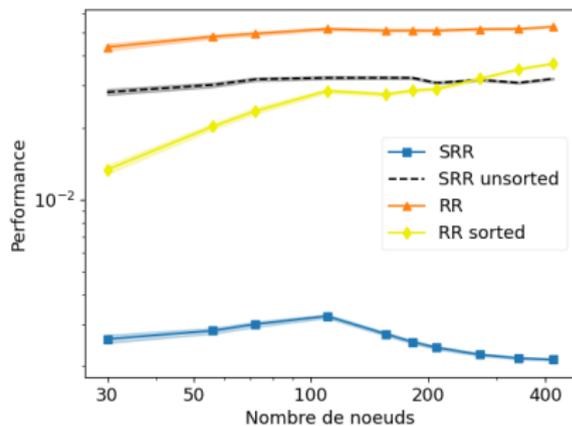
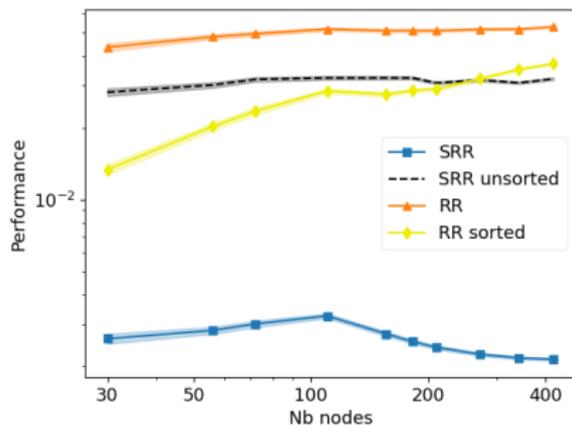
Dijkstra vs Marche aléatoire :

- Barrières de potentiel
- Chemin sans cycle
- Pas d'impasse
- Temps de calcul variable

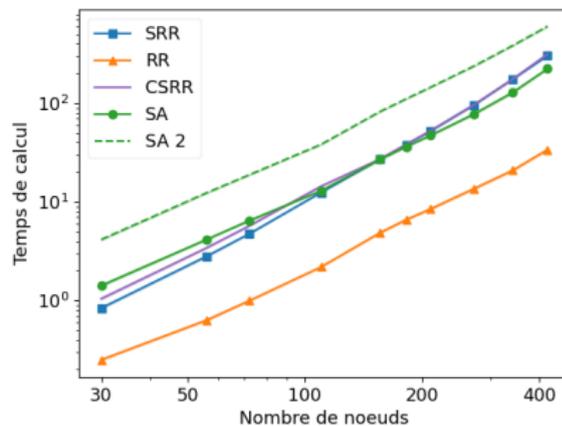
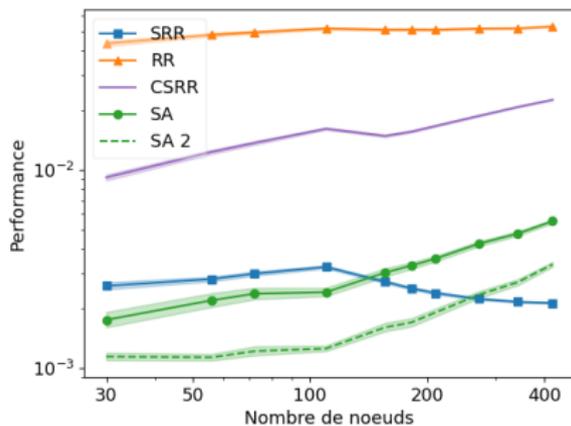
Résultats complémentaires : méta-heuristiques



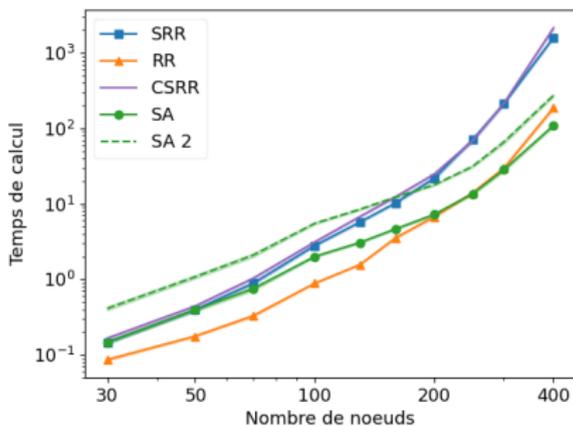
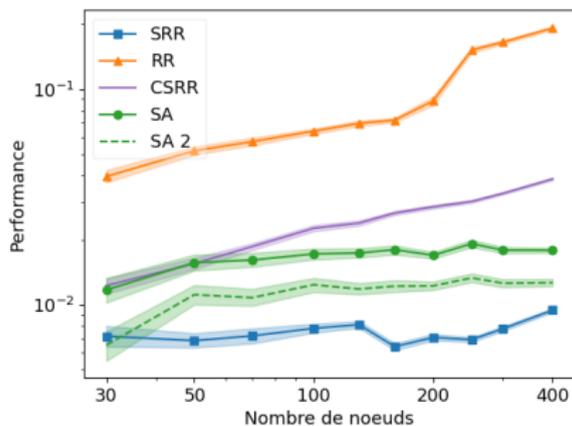
Résultats complémentaires : importance du tri



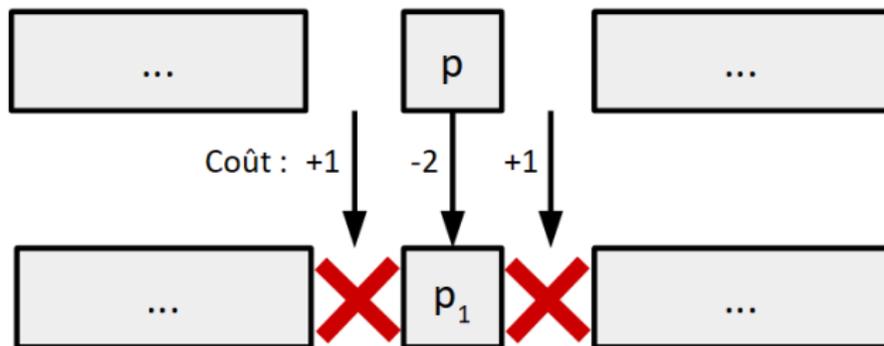
Résultats complémentaires : flots insécables statiques



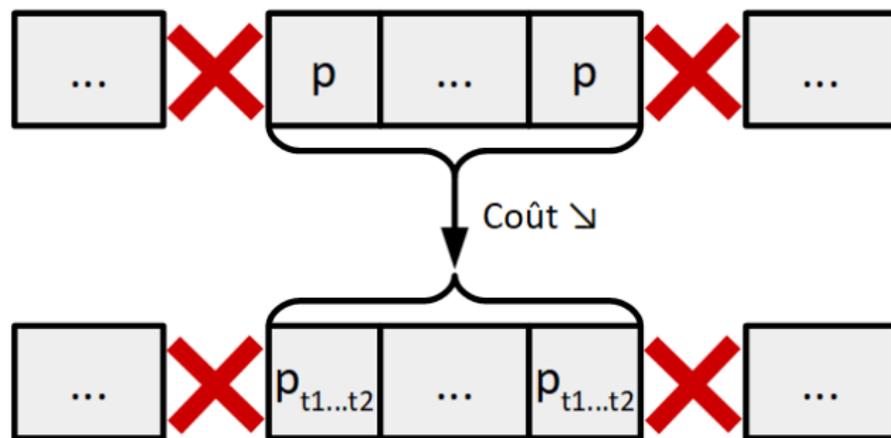
Résultats complémentaires : flots insécables statiques (random)



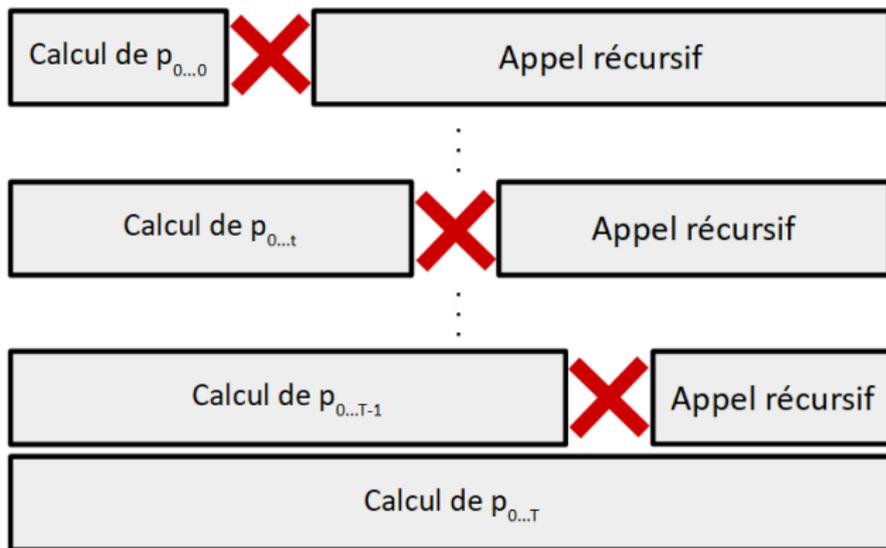
Pricing par Gamvros et Raghavan



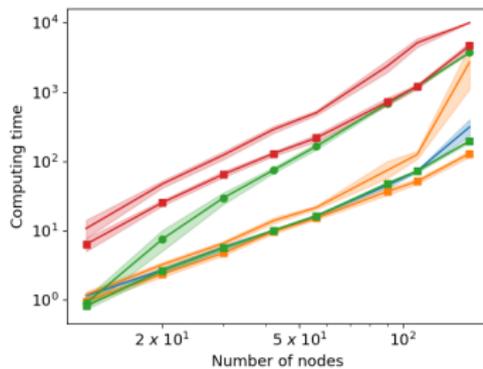
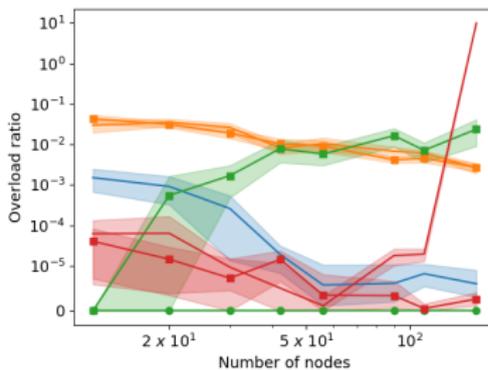
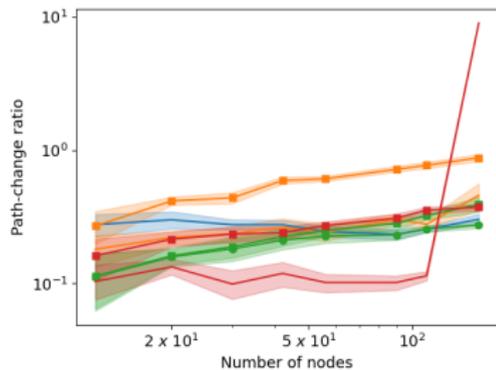
Pricing sans k-plus-court chemins



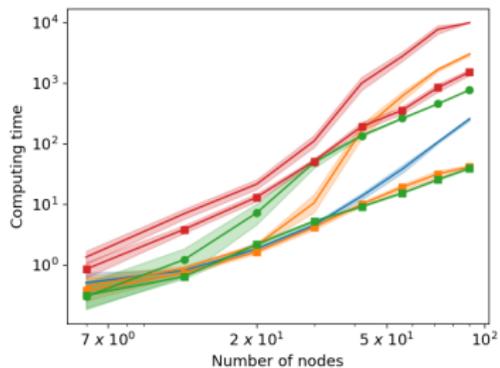
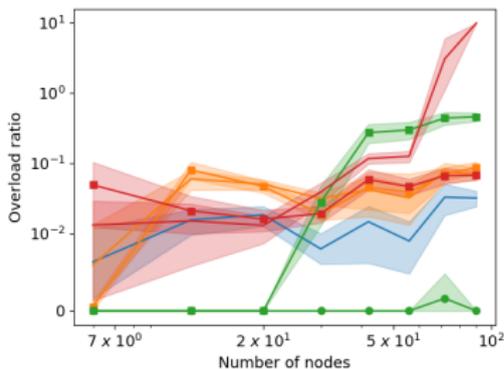
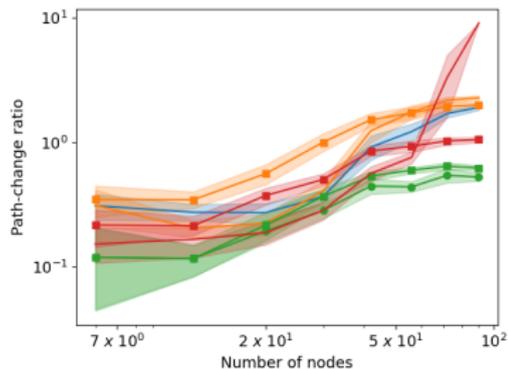
Pricing sans programmation dynamique



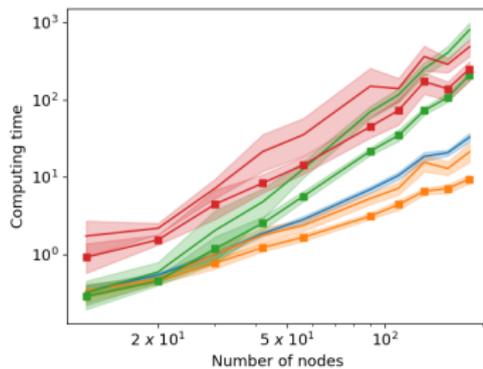
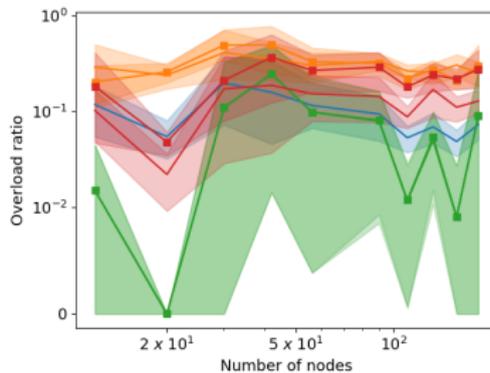
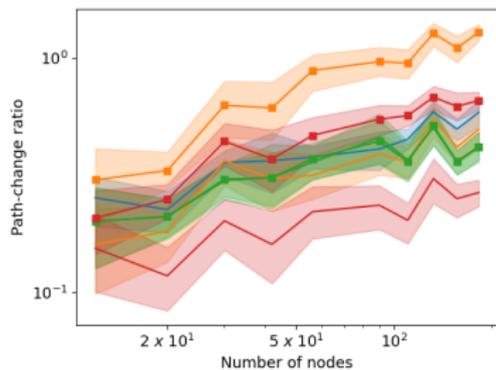
Résultats complémentaires : flots dynamiques (facile)



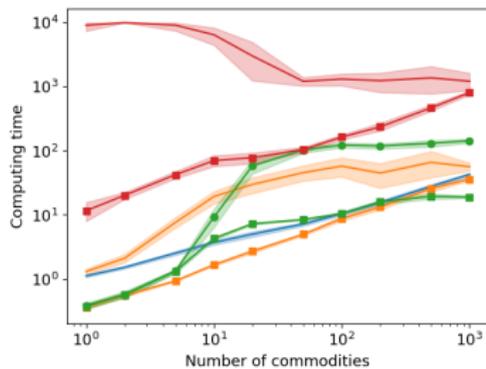
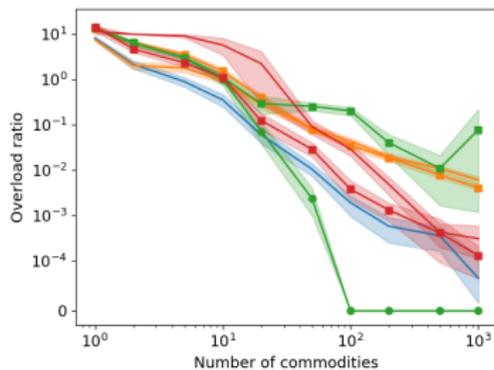
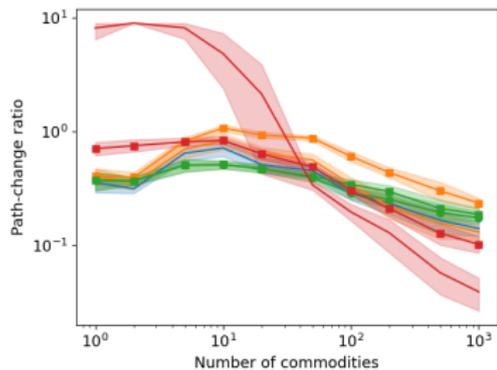
Résultats complémentaires : flots dynamiques (difficile)



Résultats complémentaires : flots dynamiques (random)



Résultats complémentaires : flots dynamiques (commodités)



Flots dynamiques : principaux résultats

Restriction des chemins autorisés :

- Temps de calcul réduit
- Solution moins bonnes

Arc-noeud vs chemins :

- Arc-noeud : uniquement si agrégation
- Arc-noeud meilleur

Favoriser les chemins courts est très important

$$(P) \quad \max_x c^T x$$

tel que

$$A_1 x \leq b_1$$

$$A_2 x \leq b_2$$

$$x \in X$$

Modèle initial

$$(O) \quad \max_x \pi x$$

tel que

$$A_2 x \leq b_2$$

$$x \in X$$

Oracle
d'optimisation

$$\begin{aligned} (DW) \quad & \max_{x, \lambda_i} c^T x \\ & \text{tel que} \\ & A_1 x \leq b_1 \\ & \sum_{i \in I} \lambda_i x_i = x \\ & \sum_{i \in I} \lambda_i = 1 \\ & x \in X \\ & \lambda_i \in \mathbb{R}^+, \quad \forall i \in I \end{aligned}$$

Problème maître de Dantzig-Wolfe

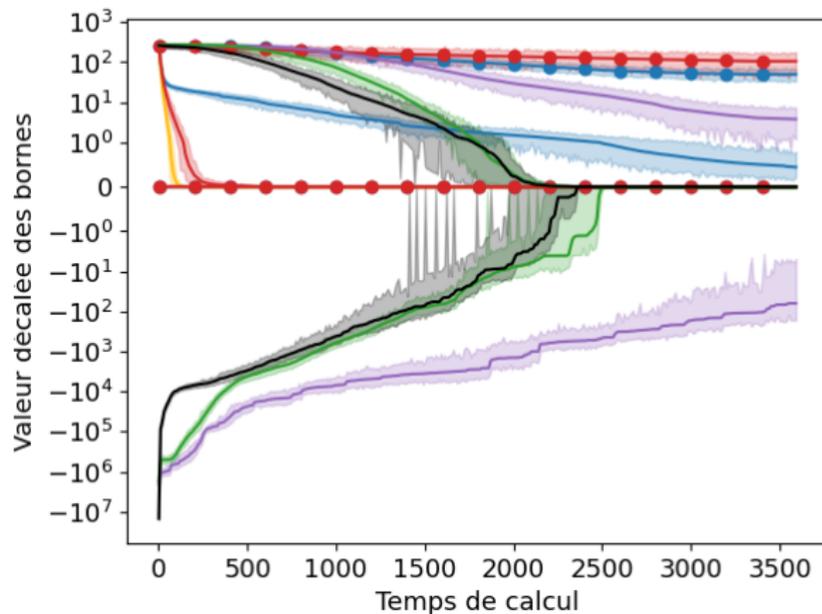
$$\begin{aligned} (F) \quad & \max_x c^T x \\ & \text{tel que} \\ & A_1 x \leq b_1 \\ & \pi x \leq \pi_0 \quad \forall (\pi, \pi_0) \in \mathcal{C} \subset \mathcal{C}(Q_2) \\ & x \in \bar{X} \end{aligned}$$

Problème maître de Fenchel

$$\begin{aligned} (S) \quad & \max_{\pi, \pi_0} \pi \hat{x} - \pi_0 \\ & \text{tel que} \\ & \pi x_i \leq \pi_0, \quad \forall x_i \in Q_2 \\ & \pi, \pi_0 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Problème de séparation

Résultats complémentaires : décompositions



Résultats complémentaires : décompositions

