



**HAL**  
open science

## Estimation du paramètre de multifractalité

Lorena Leon Arencibia, Herwig Wendt, Jean-Yves Tournet, Patrice Abry

► **To cite this version:**

Lorena Leon Arencibia, Herwig Wendt, Jean-Yves Tournet, Patrice Abry. Estimation du paramètre de multifractalité : régression linéaire, maximum de vraisemblance ou inférence Bayésienne ?. XXVII-ème Colloque Francophone de Traitement du Signal et des Images (GRETSI 2022), Sep 2022, Nancy, France. pp.1-4. hal-03850442v2

**HAL Id: hal-03850442**

**<https://hal.science/hal-03850442v2>**

Submitted on 13 Nov 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**HAL**  
open science

# Estimation du paramètre de multifractalité : régression linéaire, maximum de vraisemblance ou inférence Bayésienne ?

Lorena Leon Arencibia, Herwig Wendt, Jean-Yves Tournet, Patrice Abry

## ► To cite this version:

Lorena Leon Arencibia, Herwig Wendt, Jean-Yves Tournet, Patrice Abry. Estimation du paramètre de multifractalité : régression linéaire, maximum de vraisemblance ou inférence Bayésienne ?. XXVII-ème Colloque Francophone de Traitement du Signal et des Images (GRETSI 2022), Sep 2022, Nancy, France. hal-03735524

**HAL Id: hal-03735524**

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03735524>

Submitted on 21 Jul 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Estimation du paramètre de multifractalité : régression linéaire, maximum de vraisemblance ou inférence Bayésienne ?

Lorena LEON<sup>1</sup>, Herwig WENDT<sup>1</sup>, Jean-Yves TOURNERET<sup>1</sup>, Patrice ABRY<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Université de Toulouse, CNRS, IRIT, Toulouse (FR), firstname.lastname@irit.fr,

<sup>2</sup>CNRS, ENS de Lyon, Laboratoire de Physique, Lyon (FR), patrice.abry@ens-lyon.fr

Work supported by ANR-18-CE45-0007 MUTATION

**Résumé** – L’analyse multifractale est aujourd’hui un outil important de la caractérisation des dynamiques temporelles ou spatiales. Si l’estimation du paramètre de multifractalité peut se faire efficacement par des outils devenus standards, elle reste délicate pour des signaux et images de petites tailles. Le présent travail propose différents estimateurs construits sur des algorithmes Expectation-Maximization et compare leurs performances à l’aide de simulations de Monte Carlo contre les outils de l’état de l’art dans un contexte de signaux univariés de petites tailles.

**Abstract** – Multifractal has nowadays become a standard tool in modern signal and image processing, mostly used to characterize scale-free spatial or temporal dynamics. While multifractality parameter estimation can be performed using well-documented procedures, it remains a challenging task for small sample-size observations. This work studies Expectation-Maximization estimators for the multifractality parameter and compares, by Monte Carlo simulations, their performance against state-of-the-art estimators for univariate small sample size time series.

## 1 Introduction

**Contexte.** L’analyse multifractale devient un outil classique du traitement du signal et de l’image moderne dédié à l’étude de l’invariance d’échelle dans les dynamiques spatiales ou temporelles, c’est-à-dire, dans les systèmes dont les dynamiques ne sont plus contrôlées par une ou un petit nombre d’échelles, mais a contrario, mettent en jeu un large continuum d’échelles en interactions. Cette relation entre les échelles est alors quantifiée par un (ou quelques) exposant(s) de loi d’échelle [1]. Dans ce contexte, l’analyse multifractale a pour objet particulier de caractériser les fluctuations temporelles ou spatiales de régularité locale, pertinentes dans les applications où l’information importante réside dans une organisation fine de la dynamique des écarts à la gaussianité [2]. L’analyse multifractale a été abondamment utilisée dans de nombreuses applications de natures très différentes (cf. [1, 3] et les références qui y sont citées). L’estimation du paramètre de multifractalité reste délicate et fait l’objet constant de travaux de recherches.

**État-de-l’art.** Les outils classiques d’estimation du paramètre de multifractalité consistent en régressions linéaires qui quantifient l’évolution des statistiques d’une quantité multi-échelle bien choisie à travers les échelles et ont fait leur preuve sur des signaux de grandes tailles. L’estimation en contexte de signaux courts, comme c’est souvent le cas pour les applications bio-médicales, reste difficile : l’observation n’est en effet plus assez longue pour être analysée à travers suffisamment d’échelles. Il faut alors pallier cette difficulté par une modélisation statistique des dynamiques multifractales [4–6]. L’exploitation de ces modèles a ouvert la voie à la construction de nouvelles familles d’estimateurs, essentiellement par inférence

bayésienne [6–8]. Ces travaux ont montré, qu’au prix d’un surcoût conceptuel important dans la modélisation fine de la dynamique temporelle pour inclure explicitement le paramètre de multifractalité, l’estimation du paramètre de multifractalité devenait beaucoup plus robuste notamment vis-à-vis de la faible taille des observations. Quoique le coût additionnel en temps de calcul induit par l’inférence bayésienne reste acceptable, le traitement de grandes bases de données appelle de nouveaux efforts pour diminuer ce coût de calcul.

**Objectifs et contributions.** L’objectif de ce travail est donc d’une part de proposer une stratégie originale d’estimation du paramètre de multifractalité en maximisant la vraisemblance au moyen d’un algorithme dit *Expectation-Maximization* (EM), d’autre part de comparer ces performances d’estimation et de coût de calcul contre les estimateurs construits à l’aide de régressions linéaires ou par inférence bayésienne, dans un contexte de signaux temporels univariés de tailles courtes. À cette fin, la section 2 [restitue](#) d’abord les éléments-clés de l’analyse multifractale (régularité locale, spectre et formalisme multifractals, régression linéaire) avant de rappeler les modélisations statistiques classiquement proposées pour les séries temporelles multifractales. La section 3 présente l’algorithme EM permettant de minimiser la vraisemblance correspondante. La section 4 décrit les estimateurs bayésiens construits à l’aide d’un échantillonneur de Gibbs pour l’estimateur de la moyenne a posteriori et par algorithme EM pour l’estimateur du maximum a posteriori. La section 5 compare, au moyen de simulations de Monte Carlo effectuées pour plusieurs paramètres de multifractalité et tailles d’observations, ces différents estimateurs en terme de performances d’estimation et de coûts de calculs.

## 2 Analyse multifractale

### 2.1 Formalisme multifractal

**Spectre multifractal.** L'analyse multifractale consiste à caractériser les fluctuations au cours du temps de la régularité ponctuelle d'un signal ou d'une fonction  $X(t) \in \mathbb{R}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . La régularité ponctuelle de  $X(t)$  peut être déterminée à l'aide de son exposant de Hölder noté  $h_X(t) \geq 0$ , voir, e.g., [2] pour plus de détails. Plus  $h_X(t)$  est proche de 0, plus le signal  $X(t)$  est irrégulier autour de la position  $t$ . Une description plus globale de la régularité ponctuelle de  $X(t)$  est fournie par le *spectre multifractal*  $\mathcal{D}(h)$  de  $X(t)$  [2], qui est défini par les dimensions de Hausdorff  $\dim_H$  des ensembles de points  $t$  ayant le même exposant de Hölder  $h$ , i.e.,  $\mathcal{D}(h) \triangleq \dim_H \{t : h_X(t) = h\}$ . L'estimation du spectre multifractal est généralement effectuée à l'aide de statistiques multi-échelles comme les coefficients en ondelettes ou les coefficients dominants (wavelet leaders) comme résumé dans [2, 3] et dans la section suivante.

**Coefficient dominants.** Considérons une ondelette mère  $\psi$ , c'est-à-dire une fonction oscillante de référence caractérisée par un nombre fini de moments nuls  $N_\psi$ , un entier positif tel que  $\psi \in \mathcal{C}^{N_\psi-1}$ ,  $\forall n = 0, \dots, N_\psi - 1$ ,  $\int_{\mathbb{R}} t^n \psi(t) dt = 0$  et  $\int_{\mathbb{R}} t^{N_\psi} \psi(t) dt \neq 0$ . L'ondelette est choisie de manière à ce que ses versions dilatées et translatées  $\{\psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}t - k)\}_{(j,k) \in (\mathbb{Z}, \mathbb{Z})}$  forment une base orthonormée de  $L^2(\mathbb{R})$ . Les coefficients de la transformée en ondelettes discrètes de  $X(t)$  (normalisée dans  $L_1$ ) sont définis par  $d_X(j, k) \triangleq 2^{-j/2} \langle \psi_{j,k} | X \rangle$ , et les coefficients dominants (wavelet leaders) associés sont

$$L_X(j, k) \triangleq \sup_{\lambda' \in \mathcal{C}_{3\lambda_{j,k}}} |d_X(\lambda')|,$$

où  $\lambda_{j,k} = [k2^j, (k+1)2^j]$  est un intervalle diadique de taille  $2^j$  et  $3\lambda_{j,k}$  désigne l'union de  $\lambda_{j,k}$  avec ses deux voisins.

**Formalisme multifractal.** On peut montrer que les cumulants d'ordre  $p$  du logarithme des coefficients dominants  $\ell_j(k) = \ln L_X(j, k)$  à l'échelle  $2^j$ , notés  $C_p(j)$ , peuvent s'écrire [3]

$$C_p(j) = c_p^0 + j c_p \ln 2, \quad (1)$$

et que les *log-cumulants*  $c_p$  fournissent une approximation du spectre multifractal  $\mathcal{D}(h) \approx 1 + \frac{c_2}{2} \left( \frac{h - c_1}{c_2} \right)^2$ , avec  $c_2 < 0$ .

On notera que  $c_1$  permet de quantifier la régularité moyenne de  $X(t)$  et que le *paramètre de multifractalité*  $c_2$  permet de quantifier les fluctuations de cette régularité au premier ordre. Dans ce qui suit, nous nous concentrons sur ce paramètre  $c_2$  qui a une importance fondamentale pour les modèles d'analyse multifractale, voir, e.g., [3].

**Estimation par régression linéaire.** La relation (1) suggère que le paramètre de multifractalité peut s'estimer à l'aide d'une régression linéaire construite à partir de la variance empirique (notée  $\widehat{\text{Var}}$ ) du logarithme des coefficients dominants à différentes échelles  $j \in [j_1, j_2]$  (avec  $[a, b]$  l'ensemble des entiers  $a, \dots, b$ ), c'est-à-dire

$$\hat{c}_2 = \frac{1}{\ln 2} \sum_{j=j_1}^{j_2} w_j \widehat{\text{Var}}[\ell_j], \quad (2)$$

où  $w_j$  sont les poids utilisés dans la régression [3].

### 2.2 Modèle statistique

**Modèle temporel.** On peut montrer que le vecteur constitué du logarithme des coefficients dominants centrés noté  $\mathbf{l}_j$  est approximativement de loi normale multivariée avec des covariances données dans [8]. Nous proposons dans cet article d'utiliser un modèle de covariances intra-échelles équivalent à celui de [8] mais ayant une forme plus simple définie par deux paramètres  $\theta_1 = -c_2$  et  $\theta_2$  :

$$\begin{aligned} S_j(\Delta k) &= \text{cov}[\mathbf{l}_j(k), \mathbf{l}_j(k + \Delta k)], \\ &= \theta_1 f_{1j}(|\Delta k|) + \theta_2 f_{2j}(|\Delta k|), \end{aligned} \quad (3)$$

avec

$$f_{1j}(|\Delta k|) = \max\{0, -\ln((|\Delta k| + 1)/(r_j + 1))\}, \quad (4)$$

$$f_{2j}(|\Delta k|) = \max\{0, 1 - \ln(|\Delta k| + 1)/\ln 4\}, \quad (5)$$

où  $r_j = \lfloor n_j/5 \rfloor$ ,  $n_j \approx \lfloor N/2^j \rfloor$  est le nombre de coefficients  $\mathbf{l}_j$  à l'échelle  $j$ ,  $N$  est la longueur du signal et  $\lfloor \cdot \rfloor$  désigne la partie entière. Notons que pour  $i = 1, 2$  et pour chaque échelle  $j$ ,  $f_{ij}$  est une fonction non-négative. De plus, comme  $\theta_1 > 0$  et qu'on peut supposer  $\theta_2 > 0$ ,  $S_j$  est également une fonction non-négative, ce qui permet d'assurer que (3) est une covariance valide pour le modèle gaussien centré utilisé pour  $\mathbf{l}_j$ .

**Modèle fréquentiel.** Nous proposons d'utiliser l'approximation de Whittle [9] qui permet de diagonaliser la matrice de covariance dont les éléments sont (3) et de considérer les coefficients  $\mathbf{z}_j = \mathcal{F}_{I_j}(\mathbf{l}_j) \in \mathbb{C}^{n_j-1}$  obtenus par transformée de Fourier discrète (TFD) de  $\mathbf{l}_j$ , où  $\mathcal{F}_{I_j}(\cdot)$  calcule et vectorise les coefficients de la TFD dans  $I_j = \llbracket -\lfloor n_j/2 \rfloor + 1, \lfloor n_j/2 \rfloor \rrbracket \setminus \{0\}$  avec les fréquences  $\{\omega_m = 2\pi m/n_j\}_{m \in I_j}$ . On suppose de plus que les vecteurs  $\{\mathbf{z}_j\}_{j=j_1}^{j_2}$  obtenus pour différentes échelles sont indépendants, ce qui permet d'écrire la vraisemblance de  $\mathbf{z} = [\mathbf{z}_{j_1}^T, \dots, \mathbf{z}_{j_2}^T]^T \in \mathbb{C}^M$  comme suit

$$p(\mathbf{z} | \boldsymbol{\theta}) \propto (\det \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}))^{-1} \exp(-\mathbf{z}^H \mathbf{R}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{z}), \quad (6)$$

avec  $\mathbb{E}[\mathbf{z}] = \mathbf{0}$ ,  $\mathbb{E}[\mathbf{z} \mathbf{z}^T] = \mathbf{0}$  et  $\mathbb{E}[\mathbf{z} \mathbf{z}^H] = \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta})$ , où  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$  et  $\cdot^T$  ( $\cdot^H$ ) est l'opérateur transposé (transposé conjugué). Notons que la matrice de covariance  $\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}) = \theta_1 \mathbf{G}_1 + \theta_2 \mathbf{G}_2$  est une matrice diagonale définie positive à coefficients réels et que les matrices  $\mathbf{G}_1$  and  $\mathbf{G}_2$  sont également diagonales et intègrent le modèle de covariance (3).

**Vraisemblance augmentée.** La vraisemblance (6) peut être vue comme la loi marginale d'une vraisemblance augmentée

$$\begin{aligned} p(\mathbf{z}, \mathbf{u} | \boldsymbol{\theta}) &\propto \theta_1^{-M} \exp[-\theta_1^{-1} (\mathbf{z} - \mathbf{u})^H \mathbf{G}_1^{-1} (\mathbf{z} - \mathbf{u})] \\ &\quad \theta_2^{-M} \exp[-\theta_2^{-1} \mathbf{u}^H \mathbf{G}_2^{-1} \mathbf{u}], \end{aligned} \quad (7)$$

où  $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^M$  est un vecteur contenant des variables cachées, de loi conditionnelle gaussienne complexe ( $\mathcal{CN}$ ) dont la moyenne dépend des observations  $\mathbf{z}$ , i.e.,

$$\mathbf{u} | \boldsymbol{\theta}, \mathbf{z} \sim \mathcal{CN}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}), \quad (8)$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = [(\theta_1 \mathbf{G}_1)^{-1} + (\theta_2 \mathbf{G}_2)^{-1}]^{-1}, \quad \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\Sigma} (\theta_1 \mathbf{G}_1)^{-1} \mathbf{z}. \quad (9)$$

Notons que l'introduction de ce vecteur  $\mathbf{u}$  permet de simplifier l'expression des lois conditionnelles qui seront utilisées dans les stratégies d'estimation considérées dans cet article.

### 3 Maximum de vraisemblance

Si on suppose que  $\theta$  est un vecteur déterministe dans (7), on peut envisager d'estimer ce vecteur à l'aide de l'estimateur du maximum de vraisemblance (EMV) noté  $\hat{\theta}^{\text{MLE}}$  maximisant (7). Cet article étudie un algorithme de type expectation-maximization (EM) permettant d'approcher l'EMV. L'algorithme EM est un algorithme itératif, qui est basé sur deux étapes appelées E et M qui sont décrites ci-dessous, et qui fournit une suite de vecteurs assurant la croissance de la vraisemblance d'intérêt et une convergence vers un maximum local [10].

**Étape E (Expectation).** L'étape E de l'algorithme EM calcule la moyenne du logarithme de la vraisemblance complète  $\ln p(\mathbf{z}, \mathbf{u}|\theta)$  par rapport à la loi conditionnelle de la variable latente  $\mathbf{u}$  sachant la valeur courante de  $\theta$  notée  $\theta^{(\lambda)}$ , i.e., calcule la fonction  $Q(\theta, \theta^{(\lambda)})$  définie par

$$Q(\theta, \theta^{(\lambda)}) = \mathbb{E}_{p(\mathbf{u}|\mathbf{z}, \theta^{(\lambda)})}[\ln p(\mathbf{z}, \mathbf{u}|\theta)].$$

Si on note  $\text{tr}$  la trace d'une matrice, on peut montrer que la fonction  $Q$  pour notre modèle d'analyse multifractale est

$$\begin{aligned} Q(\theta, \theta^{(\lambda)}) &= -M \ln \theta_1 - M \ln \theta_2 \\ &\quad - (1/\theta_1) \text{tr}\{\mathbf{G}_1^{-1}(\boldsymbol{\Sigma}^{(\lambda)} + (\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu}^{(\lambda)})(\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu}^{(\lambda)})^H)\} \\ &\quad - (1/\theta_2) \text{tr}\{\mathbf{G}_2^{-1}(\boldsymbol{\Sigma}^{(\lambda)} + \boldsymbol{\mu}^{(\lambda)}(\boldsymbol{\mu}^{(\lambda)})^H)\}. \end{aligned} \quad (10)$$

**Étape M (Maximization).** L'étape M de l'algorithme EM met à jour les paramètres du modèle  $\theta_1$  et  $\theta_2$  par maximisation de  $Q(\theta, \theta^{(\lambda)})$ . En annulant le gradient de la fonction  $Q$  par rapport à  $\theta_1$  et  $\theta_2$ , on obtient :

$$\theta_1^{(\lambda+1)} = M^{-1} \text{tr}\{\mathbf{G}_1^{-1}(\boldsymbol{\Sigma}^{(\lambda)} + (\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu}^{(\lambda)})(\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu}^{(\lambda)})^H)\}, \quad (11)$$

$$\theta_2^{(\lambda+1)} = M^{-1} \text{tr}\{\mathbf{G}_2^{-1}(\boldsymbol{\Sigma}^{(\lambda)} + \boldsymbol{\mu}^{(\lambda)}(\boldsymbol{\mu}^{(\lambda)})^H)\}. \quad (12)$$

### 4 Estimation bayésienne

Dans cette partie, on suppose que  $\theta$  est un vecteur aléatoire tel que  $\theta_i$  possède une loi a priori inverse-gamma (IG) pour  $i = 1, 2$  avec les paramètres  $(\alpha_i, \beta_i)$ , i.e., de densité de probabilité

$$p(\theta_i|\alpha_i, \beta_i) \propto \theta_i^{-(\alpha_i+1)} \exp(-\beta_i/\theta_i) \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(\theta_i), \quad (13)$$

où  $\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(\cdot)$  est la fonction indicatrice sur  $\mathbb{R}^+$ . La loi a posteriori  $p(\theta, \mathbf{u}|\mathbf{z})$  s'obtient à l'aide du théorème de Bayes :

$$p(\theta, \mathbf{u}|\mathbf{z}) = p(\mathbf{z}, \mathbf{u}|\theta)p(\theta_1)p(\theta_2), \quad (14)$$

qui permet de définir l'estimateur minimisant l'erreur quadratique moyenne (estimateur MMSE) et l'estimateur du maximum a posteriori (MAP) :

$$\hat{\theta}^{\text{MMSE}} \triangleq \mathbb{E}[\theta|\mathbf{z}, \mathbf{u}], \quad (15)$$

$$\hat{\theta}^{\text{MAP}} \triangleq \text{argmax}_{\theta} [p(\theta|\mathbf{z}, \mathbf{u})]. \quad (16)$$

#### 4.1 Estimateur MMSE (Gibbs)

L'estimateur MMSE (15) n'a pas d'expression analytique simple. Nous proposons dans cet article de l'estimer en utilisant les sorties d'une méthode MCMC (Markov chain Monte

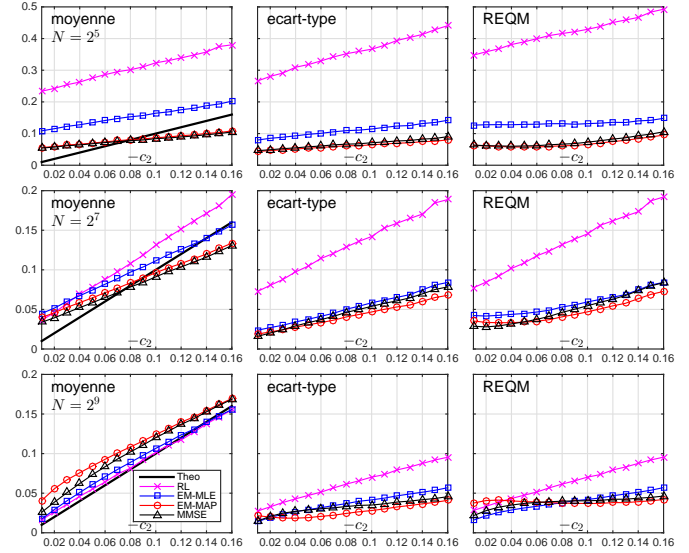


FIGURE 1 – Performance d'estimation (de gauche à droite : moyenne, écart type et racine carrée de l'erreur quadratique moyenne (REQM)) en fonction de  $c_2$  pour  $N = 2^5$  (haut),  $N = 2^7$  (milieu)  $N = 2^9$  (bas)).

Carlo). Plus précisément, on considère un échantillonneur de Gibbs qui génère des vecteurs  $\{\theta^{(s)}, \mathbf{u}^{(s)}\}_{s=1}^{N_{\text{mc}}}$  selon les lois conditionnelles de (14), i.e., (8) pour  $\mathbf{u}$  et

$$\theta_1|\mathbf{z}, \mathbf{u} \sim \text{IG}(\alpha_1 + M, \beta_1 + \text{tr}\{\mathbf{G}_1^{-1}(\mathbf{z} - \mathbf{u})(\mathbf{z} - \mathbf{u})^H\}), \quad (17)$$

$$\theta_2|\mathbf{z}, \mathbf{u} \sim \text{IG}(\alpha_2 + M, \beta_2 + \text{tr}\{\mathbf{G}_2^{-1}\mathbf{u}\mathbf{u}^H\}). \quad (18)$$

Les  $N_{\text{bi}}$  premiers  $\theta^{(s)}$  générés ne sont pas considérés pour l'estimation (*burn-in*), ce qui conduit à l'estimateur MMSE suivant

$$\hat{\theta}_i^{\text{MMSE}} \approx (N_{\text{mc}} - N_{\text{bi}})^{-1} \sum_{s=N_{\text{bi}}+1}^{N_{\text{mc}}} \theta_i^{(s)}. \quad (19)$$

#### 4.2 Estimateur MAP (Algorithme EM)

Comme dans la section 3, on peut considérer un algorithme EM qui génère une suite de vecteurs convergeant vers un maximum local de (14). Les étapes de cet algorithme EM, conduisant à l'estimateur EM-MAP, sont résumées ci-dessous.

**Étape E.** Cette étape consiste à calculer la moyenne du logarithme de la vraisemblance complète  $\ln p(\theta, \mathbf{u}|\mathbf{z})$  par rapport à la loi conditionnelle de  $\mathbf{u}$  sachant la valeur courante  $\theta^{(\lambda)}$ , i.e.,

$$\begin{aligned} F(\theta, \theta^{(\lambda)}) &= \mathbb{E}_{p(\mathbf{u}|\mathbf{z}, \theta^{(\lambda)})}[\ln p(\theta, \mathbf{u}|\mathbf{z})] \\ &= Q(\theta, \theta^{(\lambda)}) + \ln p(\theta_1) + \ln p(\theta_2). \end{aligned} \quad (20)$$

**Étape M.** En annulant le gradient de  $F$ , on obtient les mises à jour suivantes des paramètres  $\theta_1$  et  $\theta_2$  :

$$\theta_1^{(\lambda+1)} = \frac{\text{tr}\{\mathbf{G}_1^{-1}(\boldsymbol{\Sigma}^{(\lambda)} + (\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu}^{(\lambda)})(\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu}^{(\lambda)})^H)\} + \beta_1}{M + \alpha_1 + 1}, \quad (21)$$

$$\theta_2^{(\lambda+1)} = \frac{\text{tr}\{\mathbf{G}_2^{-1}(\boldsymbol{\Sigma}^{(\lambda)} + \boldsymbol{\mu}^{(\lambda)}(\boldsymbol{\mu}^{(\lambda)})^H)\} + \beta_2}{M + \alpha_2 + 1}. \quad (22)$$



## 5 Performances d'estimation comparées

**Simulations de Monte Carlo.** Nous avons considéré 10000 réalisations indépendantes d'une marche aléatoire multifractale (MRW), un signal synthétique construit de manière à obtenir les propriétés des cascades multiplicatives log-normales de Mandelbrot, voir, e.g., [5]. Le paramètre de multifractalité de ce signal a été choisi dans l'intervalle  $-c_2 \in [0.01, 0.16]$  de manière à considérer divers niveaux de multifractalité. La taille des signaux générés varie entre  $N = 2^5 = 32$  et  $N = 2^9 = 512$ . Nous avons utilisé une ondelette de Daubechies avec  $N_\psi = 2$  moments nuls, et des échelles  $j \in \llbracket 1, 2 \rrbracket$  pour  $N = 2^5$ , et  $j \in \llbracket 2, j_{\max} \rrbracket$  sinon. Nous comparons l'estimateur basé sur la régression linéaire (2) noté RL avec l'estimateur MMSE (19) et les estimateurs EM-MLE et EM-MAP définis dans les sections 3 and 4.2, respectivement. Notons que l'algorithme EM est stoppé lorsque les variations de la log-vraisemblance ou de la log-posterior deviennent inférieures à  $10^{-4}$ . Pour l'estimateur MMSE, nous avons choisi des nombres d'itérations  $N_{\text{bi}} = 1000$  et  $N_{\text{mc}} = 2000$ . Les paramètres des lois a priori pour  $\theta_1$  et  $\theta_2$  ont été choisis de manière à avoir un support égal à  $[0.004, 0.1]$ , couvrant les valeurs possibles de ces paramètres, i.e.,  $\alpha_i = 10$ ,  $\beta_i = 1/10$ .

**Résultats.** Les performances d'estimation sont évaluées en terme de moyenne, écart-type et racine de l'erreur quadratique moyenne (REQM) calculés à l'aide des différentes réalisations de MRW. Les résultats sont présentés dans la figure 1 en fonction de  $c_2$ , pour 3 tailles d'échantillons  $N = 2^5, 2^7, 2^9$ , et dans la figure 2 (gauche) en fonction de  $N$ , pour  $c_2 = -0.15$ . De plus, la figure 2 (droite) montre les temps d'exécution des différents algorithmes en fonction de  $N$ . Nos résultats indiquent que l'utilisation du modèle de la section 2 permet d'obtenir des gains de performance significatifs, en particulier pour de faibles valeurs de  $N$  et pour de grandes valeurs de  $c_2$ , avec des REQM jusqu'à 5 fois plus petites qu'avec une régression linéaire. Ceci permet pour la première fois d'obtenir des estimateurs des paramètres de multifractalité performants pour des échantillons de faible taille comme  $N = 32$ , contrairement aux estimateurs basés sur une régression linéaire. On notera que l'utilisation d'estimateurs Bayésiens avec des lois a priori inverse gamma permet d'améliorer les performances d'estimation par rapport à l'estimateur du maximum de vraisemblance. Les performances des estimateurs Bayésiens MMSE et EM-MAP sont très similaires. On préférera pour les applications pratiques l'estimateur EM-MAP qui fournit des temps de calcul beaucoup plus réduits. Enfin, les temps de calcul indiqués dans la figure 2 montrent que l'estimateur MMSE est approximativement 50 fois plus lent que l'estimateur EM-MAP, qui lui-même est deux fois plus lent qu'une régression linéaire pour  $N \leq 2^{10}$ . Globalement, ceci permet de conclure que l'estimateur EM-MAP permet d'obtenir des gains en performance d'estimation significatifs par rapport à une régression linéaire ou à un estimateur du maximum de vraisemblance, avec un coût de calcul beaucoup plus faible que l'estimateur MMSE, et de l'ordre de celui obtenu avec une régression linéaire.

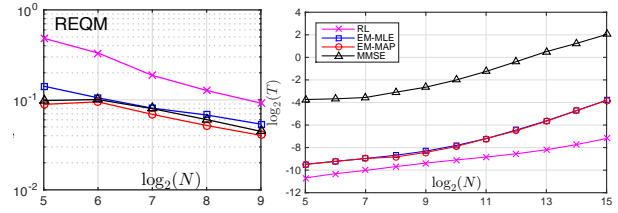


FIGURE 2 – REQM (gauche) et temps d'exécution (droite) vs. de  $N$  (CPU Intel Xeon 2.2GHz, 64GB RAM, "single thread").

## 6 Conclusions

Ces travaux montrent la pertinence des algorithmes EM pour l'estimation du paramètre multifractal : ces algorithmes exploitent la modélisation statistique multifractale pour obtenir les mêmes performances que les échantillonneurs Monte Carlo, mais bénéficient de coûts de calcul significativement moindres. Ces travaux seront poursuivis pour permettre l'estimation EM des paramètres de cross-multifractalité pour une analyse multifractale multivariée [1] et non homogène ou non stationnaire.

## Références

- [1] P. Abry, H. Wendt, S. Jaffard, and G. Didier, "Multivariate scale-free temporal dynamics : From spectral (Fourier) to fractal (wavelet) analysis," *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, vol. 20, no. 5, pp. 489–501, 2019.
- [2] S. Jaffard, "Wavelet techniques in multifractal analysis," in *Fractal Geometry and Appl.*, M. Lapidus and M. van Frankenhuijsen, Eds., 2004, vol. 72(2), pp. 91–152.
- [3] H. Wendt, P. Abry, and S. Jaffard, "Bootstrap for empirical multifractal analysis," *IEEE Signal Proces. Mag.*, vol. 24, no. 4, pp. 38–48, 2007.
- [4] B. B. Mandelbrot, "A multifractal walk down wall street," *Sci. American*, vol. 280, no. 2, pp. 70–73, 1999.
- [5] E. Bacry, J. Delour, and J.-F. Muzy, "Multifractal random walk," *Phys. Rev. E*, vol. 64 : 026103, 2001.
- [6] T. Lux, "Higher dimensional multifractal processes : A GMM approach," *Journal of Business and Economic Statistics*, vol. 26, pp. 194–210, 2007.
- [7] L. E. Calvet and A. J. Fisher, "How to forecast long-run volatility : Regime switching and the estimation of multifractal processes," *Journal of Financial Econometrics*, vol. 2, no. 1, pp. 49–83, 2004.
- [8] H. Wendt, S. Combexelle, Y. Altmann, J.-Y. Tourneret, S. McLaughlin, and P. Abry, "Multifractal analysis of multivariate images using gamma Markov random field priors," *SIAM J. Imaging Sci.*, vol. 11(2), pp. 1294, 2018.
- [9] P. Whittle, "Estimation and information in stationary time series," *Ark. Mat.*, vol. 2, no. 5, pp. 423–434, 1953.
- [10] A. P. Dempster, N. M. Laird, and D. B. Rubin, "Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm," *J. Royal Stat. Soc. B*, vol. 39, no. 1, pp. 1–22, 1977.